Clasa a X-a - Etapa a V-a - Problema 2

Enunţ. *Fie* $k, n \in \mathbb{N}$ *cu* $1 \leq k \leq n$. *Fie* A *o mulţime cu* n *elemente, iar* B *o submulţime a sa cu* k *elemente. Determinaţi numărul perechilor* $(X, Y) \in P(A) \times P(A)$ *care satisfac, in fiecare caz, relaţiile:*

a) $X \cup Y = A$ *şi* $X \cap Y = B$;

b) $X \cup Y = A$ *şi* $\operatorname{Card}(X \cap Y) = k$.

Soluţie. **a)** Din ipoteză există $V, W \subset A \backslash B$ astfel încât $X = B \cup V$, $Y = B \cup W$, $V \cup W = A \backslash B$ şi $V \cap W = \varnothing$. Cum pentru fiecare mulţime V avem $W = (A \backslash B) \backslash V$, deducem că sunt 2^{n-k} variante de alegere a mulţimii V, deci tot atâtea perechi (X, Y) care indeplinesc codiţiile cerute.

b) Evident că orice pereche convenabilă punctului precedent, este convenabilă şi acum. Practic numărul de soluţii depinde de alegerea unei submulţimi cu k elemente. Vor fi $2^{n-k} \cdot C_n^k$ perechi care corespund cerinţelor. $\square$