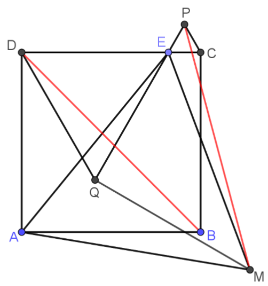
Problema 4. Fie $ABCD$ un pătrat. Se consideră un punct oarecare E pe latura CD. Se construiesc pe rând triunghiurile echilaterale $\triangle AEM$ astfel încât punctul B se găseşte în interiorul triunghiului $\triangle AEM$ şi $\triangle CEP$ în exteriorul pătratului.

Arătaţi că $PM = BD$.

Adrian Bud, Negreşti Oaş

Soluţie



Construim în interiorul pătratului un triunghi echilateral $\triangle EDQ$.

$m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle QED) - m(\sphericalangle QEA) = 60^\circ - m(\sphericalangle QEA)$

$m(\sphericalangle MEQ) = m(\sphericalangle MEA) - m(\sphericalangle QEA) = 60^\circ - m(\sphericalangle QEA)$

$$\begin{array}{l}\triangle AED \\ \triangle MEQ\end{array} \left\{\begin{array}{c}[AE] \equiv [QE] \\ \sphericalangle AED \equiv \sphericalangle MEQ \\ [AE] \equiv [ME]\end{array}\right\} \overset{LUL}{\Rightarrow} \triangle AED \equiv \triangle MEQ \Rightarrow \begin{cases}[AD] \equiv [MQ] \\ \triangle ADE \equiv \triangle MQE\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle DEQ \text{ echilateral} \Rightarrow QE = DE \\ \triangle CEP \text{ echilateral} \Rightarrow PE = QE \\ m(\sphericalangle DEQ) = m(\sphericalangle PEC) = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow P, E, Q \text{ coliniare}$$

Şi, de asemenea, $PQ = PE + EQ = EC + DE = DC$.

$$\begin{array}{l}\triangle ACD\\ \triangle MPQ\end{array}\left\{\begin{array}{c}[DC]\equiv[QP]\\ \sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle MQP\\ [DA]\equiv[QM]\end{array}\right\}\overset{LUL}{\Rightarrow}\triangle ACD\equiv\triangle MPQ\Rightarrow[AC]\equiv[MP]$$

Astfel, $[BD]\equiv[MP]$.