$x, y, z \in \mathbb{R}_+$ a.î. $x+y+z = xy+xz+yz$.

Din Cauchy-Buniakowsky-Schwarz $\Rightarrow (x^2+(\sqrt{y})^2+1^2)(1^2+(\sqrt{y})^2+z^2) \geq$

$\geq (x\cdot 1+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}+1\cdot z)^2 = (x+y+z)^2 \Leftrightarrow (x^2+y+1)(1^2+y+1) \geq (x+y+z)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y+1} \leq \frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$ ① Obținem analog că:

$\frac{1}{y^2+z+1} \leq \frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}$ ② și $\frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}$ ③.

Însumăm ① ② și ③ și obținem:

$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{(1+y+z^2)+(1+z+x^2)+(1+x+y^2)}{(x+y+z)^2} = \frac{x^2+y^2+z^2+x+y+z+3}{(x+y+z)^2}$

Demonstrăm că $\frac{x^2+y^2+z^2+x+y+z+3}{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz} \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+y+z+3 \leq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$\Leftrightarrow 3+x+y+z \leq 2xy+2xz+2yz$.

Cum $x+y+z = xy+xz+yz \Rightarrow$ trebuie să demonstrăm că $x+y+z \geq 3$.

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, dar cum $x+y+z = xy+yz+zx \Rightarrow (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)$.

Din C.B.S (Titu Andreescu) $\Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y+z)^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}+2(x+y+z) \Leftrightarrow \frac{2}{3}(x+y+z)^2 \geq 2(x+y+z)$

$\Leftrightarrow x+y+z \geq 3$

q.e.d

$\Rightarrow 3+x+y+z \leq 2xy+2xz+2yz \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2+x+y+z+3}{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1} \leq 1$.