

Clasa a X-a - Etapa IV - Problema 1

Enunț. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$4^{[x]} + 4^{\{x\}} = 2^{1+x},$$

unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .

Soluție. Din AM-GM avem

$$4^{[x]} + 4^{\{x\}} \geq 2\sqrt{4^{[x]} \cdot 4^{\{x\}}} = 2 \cdot 4^{\frac{[x]+\{x\}}{2}} = 2 \cdot 2^x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $[x] = \{x\}$, adică $x = 0$. Obținem $S = \{0\}$. □