Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare, cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} \geqslant \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

b) triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă are loc egalitatea $\dfrac{p-a}{p-c} + \dfrac{p-b}{p-a} + \dfrac{p-c}{p-b} - \dfrac{p-a}{b} - \dfrac{p-b}{c} - \dfrac{p-c}{a} = \dfrac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Cristian Heuberger

Soluţie. a) Notăm cu E membrul stâng al inegalităţii. Avem:

$$\frac{p-a}{p-c} - \frac{p-a}{b} = (p-a)\left(\frac{1}{p-c} - \frac{1}{b}\right) = (p-a)\frac{b+c-p}{b(p-c)} = \frac{(p-a)^2}{b(p-c)}$$

şi relaţiile analoage. Folosind inegalitatea lui Bergström, obţinem:

$$E = \frac{(p-a)^2}{b(p-c)} + \frac{(p-b)^2}{c(p-a)} + \frac{(p-c)^2}{a(p-b)} \geqslant \frac{(p-a+p-b+p-c)^2}{b(p-c)+c(p-a)+a(p-b)} = \frac{2p^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

b) Implicaţia de la stânga la dreapta rezultă prin calcul direct.

Fie un triunghi ABC pentru care are loc egalitatea din enunţ.

Din inegalitatea lui Bergström ştim că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $a, b, c > 0$, avem $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} \geqslant \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

În cazul nostru, pentru a exista egalitatea, trebuie să avem:

$$\frac{p-a}{b(p-c)} = \frac{p-b}{c(p-a)} = \frac{p-c}{a(p-b)}.$$

Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, rezultă:

$$\frac{p-a}{b(p-c)} = \frac{p-b}{c(p-a)} = \frac{p-c}{a(p-b)} = \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Din $\dfrac{p-a}{b(p-c)} = \dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$ deducem $\dfrac{-a+b+c}{b(a+b-c)} = \dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$, deci $\dfrac{-a+b+c}{b} = \dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$, adică $1 + \dfrac{c-a}{b} = 1 + \dfrac{2ab-2c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Aşadar avem $\dfrac{c-a}{b} = \dfrac{2ab-2c^2}{a^2+b^2+c^2}$ şi relaţiile analoage.

Deducem că $c-a$ şi $ab-c^2$ au acelaşi semn. (1). Similar, obţinem:

$$a-b \text{ şi } bc-a^2 \text{ au acelaşi semn} \quad (2)$$

$$b-c \text{ şi } ca-b^2 \text{ au acelaşi semn.} \quad (3).$$

Dacă $a < b$ şi $a < c$, atunci $a - b < 0$ şi $bc - a^2 > 0$, ceea ce contrazice (2). Aşadar a nu este cea mai mică dintre laturi. Analog deducem că nici b nici c nu sunt cele mai mici laturi. Rezultă că cel puţin două laturi sunt egale. Dacă $a = b$, atunci $a - b = 0$, rezultând $bc - a^2 = 0$, deci $c = a$. Analog în celelalte cazuri.