COMENTARII FAZA JUDEŢEANĂ, 9 MARTIE 2013

Abstract. Personal comments on some of the problems presented at the District Round of the National Mathematics Olympiad 2013.
Data: 12 martie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2013, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *a) Calculaţi* $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$*;*

b) Arătaţi că numărul 2015^{2014} *poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Deoarece $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3 = 2015$, avem şi

$$2015^{2014} = \left(2015^{671} \cdot 5\right)^3 + \left(2015^{671} \cdot 6\right)^3 + \left(2015^{671} \cdot 7\right)^3 + \left(2015^{671} \cdot 11\right)^3 .$$

Cu tot respectul cuvenit (sau nu), problema este aproape o insultă, căci calculele sunt nu numai triviale, dar şi lipsite de orice scop educaţional.

Pentru punctul a) se acordă în baremul oficial 2 puncte din 7; desigur pentru a plivi de la etapa naţională pe cei ajunşi atât de departe (la etapa judeţeană), dar care nu pot calcula un număr de patru cifre, prin ridicări la cub, ha ha. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi cifrele nenule* a, b, c *astfel încât* $\overline{ab}^2 = \overline{cab}$*.*

Soluţie. Din fericire, există şi o soluţie "inteligentă"; scriind egalitatea ca $\overline{ab}(\overline{ab} - 1) = 100c$, rezultă că $100c$ este produsul a două numere naturale consecutive, şi aceasta se poate numai pentru $c = 6$ (căci 25 trebuie să dividă unul dintre ele), când $a = 2$ şi $b = 5$.

Altfel, se poate analiza pe cazuri, căci se obţine uşor că $b \in \{1, 5, 6\}$, ca singurele cifre nenule pentru care pătratul lor are ca ultimă cifră chiar cifra în cauză ($b^2 \equiv b \pmod{10}$, adică $10 \mid b^2 - b = b(b-1)$). □

Subiectul (3)**.** *Se consideră un număr natural A scris cu n cifre nenule, $n \geq 1$. Numărul B este obţinut din numărul A prin rearanjarea cifrelor acestuia. Ştiind că $A + B = 10^n$ se cere*

a) Pentru $n = 3$, daţi un exemplu de numere A şi B cu proprietatea din enunţ.
b) Arătaţi că n este număr impar.
c) Demonstraţi că în scrierea lui A există cel puţin o cifră egală cu 5.

Soluţie. a) Un exemplu este $A = 185$, $B = 815$.

b) Fie $A = \overline{x_1x_2\dots x_n}$, $B = \overline{y_1y_2\dots y_n}$, cele două numere. Pentru a avea $A + B = 10^n$ trebuie ca $x_n + y_n = 10$, iar $x_k + y_k = 9$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$. Prin urmare, în afară de ultimele cifre, celelalte trebuie să apară în perechi $(a, b = 9 - a)$. Dar nu putem avea simultan $a = y_n$ şi $b = x_n$; din cauza simetriei putem presupune $a \neq y_n$. Dar atunci a trebuie să apară printre cifrele lui B, într-o poziţie printre primele $n-1$ (alta decât unde apare b, căci avem şi $a \neq b$), şi corespunzător, pe această poziţie, b trebuie să apară ca cifră în A. Dacă eliminăm acum aceste două poziţii (unde apar cifrele (a, b) şi (b, a)), obţinem aceeaşi problemă pentru $n - 2$. Deja, acest raţionament impune n impar.

c) În acest fel coborâm până la a ajunge la cazul $n = 1$, pentru care este imediat faptul că trebuie să avem $A = B = 5$. Prin urmare, trebuie avut $x_n = y_n = 5$, deci s-a şi stabilit locul cifrei 5; exemple pentru orice n impar există, structura lor fiind complet precizată de cele spuse mai sus. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră mulţimea $M = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}\}$.*

a) Există trei mulţimi, A, B, C, nevide şi disjuncte două câte două, astfel încât $A \cup B \cup C = M$, iar produsul elementelor fiecărei mulţimi să fie acelaşi?
b) Există trei mulţimi, X, Y, Z, nevide şi disjuncte două câte două, astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$, iar suma elementelor fiecărei mulţimi să fie aceeaşi?

Soluţie. a) Problema revine la a partiţiona mulţimea $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ în trei submulţimi nevide, având fiecare aceeaşi sumă a elementelor sale, şi anume 40, căci $1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = 120$. Un astfel de exemplu simplu poate fi găsit, fără nicio altă justificare

$$A = \{5, 6, 14, 15\},\ B = \{7, 8, 12, 13\},\ C = \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11\}.$$

b) Întrebarea de la acest subpunct este oricum prea restrictivă. **În mod general, nu există nici măcar două submulţimi nevide distincte ale lui M, având aceeaşi sumă a elementelor lor, căci scrierea în baza 2 este unică!**

Există multe metode pentru a justifica acest punct, chiar fără a se face referinţă la scrierea în baza 2. Profesorul Ştefan Smărăndoiu propune astfel – elementul 2 este singurul din M care nu se divide prin 4, deci suma elementelor submulţimii din care face parte nu este un multiplu de 4, în timp ce suma elementelor oricărei alte submulţimi este multiplu de 4.

O altă metodă, reminiscentă de o idee din soluţia oficială la punctul a) este că suma elementelor lui M este $2^{16} - 2 = 2(2^{15} - 1) = 2((3-1)^{15} - 1)$, deci nu este un multiplu de 3. $\square$

3. Clasa a VI-a

Subiectul (3)**.** *a) Arătaţi că* 30007 *este număr compus.*

b) Arătaţi că şirul $37, 307, 3007, \dots, 3\underbrace{00\dots0}_{de\ n\ ori}7, \dots$ *conţine o infinitate de termeni care sunt numere compuse.*

Soluţie. În general, dacă pentru un număr prim p avem $p \mid a10^{m+1} + b$, atunci avem şi $p \mid a10^{n+1} + b$, pentru orice $n \geq m$ pentru care $p \mid 10^{n-m} - 1$. În particular, pentru p diferit de 2 şi 5 avem $p \mid 10^{p-1} - 1$ din mica teoremă a lui Fermat, deci în acel caz putem lua $n = m + k(p-1)$ pentru orice număr natural k.

În cazul de faţă, $30007 = 37 \cdot 811$ (baremul prevede 3 puncte din 7 pentru acest fapt!), şi în plus avem chiar $37 \mid 10^3 - 1$, deci putem lua $n = 3k$, nu doar $n = 36k + 3$. Poate din această cauză nu a fost propus numărul $3007 = 31 \cdot 97$, pentru care puteam lua $n = 30k + 2$ (ba chiar $n = 15k + 2$) sau $n = 96k + 2$. Din păcate, rezultatul net obţinut este transformarea unei probleme de idee într-o problemă de calcul ... $\square$

Subiectul (4)**.** *Se consideră numărul natural* $n \geq 10$ *şi mulţimea* $A = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$*. Spunem că mulţimea nevidă* $X \subset A$ *are proprietatea* $\mathcal{P}$ *dacă oricare ar fi* $x \in X$ *şi* $y \in X$*,* $x > y$*, numărul* $x + y$ *nu se divide cu numărul* $x - y$*.*

a) Daţi un exemplu de mulţime X *cu proprietatea* $\mathcal{P}$ *care conţine numerele* 4 *şi* 14 *şi care are cel puţin trei elemente.*

b) Demonstraţi că există cel puţin o mulţime X *cu proprietatea* $\mathcal{P}$ *care are exact* n *elemente.*

c) Arătaţi că nu există o mulţime X *cu proprietatea* $\mathcal{P}$ *care să aibă* n *elemente şi să conţină numerele* 4 *şi* 14.

Soluţie. a) Un exemplu este $X = \{1, 4, 14\}$.

b) Nu putem avea $x - y = 1$, căci atunci $x - y = 1 \mid x + y$, şi nici $x - y = 2$, căci atunci $x - y = 2 \mid 2(y+1) = x + y$. Deoarece distanţa între oricare două dintre elementele sale trebuie să fie cel puţin 3, reiese că o astfel de mulţime X poate conţine cel mult n elemente. Două exemple imediate sunt

$$X_1 = \{1, 4, 7, \dots, 3n-2\} \text{ şi } X_2 = \{2, 5, 8, \dots, 3n-1\},$$

căci diferenţa a oricare două elemente este multiplu de 3, dar suma nu.

c) Din cele de mai sus, rezultă că în X există cel mult un element mai mic decât 4, şi cel mult $n - 5$ elemente mai mari decât 14. Dar între 4 şi 14 pot fi alese numai numerele 9 sau 11 (dar nu împreună, căci diferenţa lor este 2), căci avem $14 - 7 = 7 \mid 21 = 14 + 7$, $8 - 4 = 4 \mid 12 = 8 + 4$, $14 - 10 = 4 \mid 24 = 14 + 10$.

Este amuzantă condiţia $n \geq 10$, cu singurul scop de a descuraja încercări exhaustive pentru valori mici ale lui n, care sunt oricum irelevante, din moment ce problema este enunţată şi trebuie rezolvată pentru n arbitrar. □

4. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că ecuaţia*

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

are 2013 *soluţii în mulţimea numerelor întregi.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Lucrând cu n în loc de 1006, condiţiile de existenţă pentru radicali duc la $0 \leq x \leq 2n$. Notând $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{2n-x}$ şi $c = \sqrt{n}$, avem $a^2 + b^2 = 2c^2$, iar ecuaţia din enunţ devine $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{2}{a+b}$, adică, după calcule, exact $a^2 + b^2 = 2c^2$. Prin urmare ecuaţia este o identitate peste $[0, 2n]$, şi răspunsul este imediat.

În mod definitiv, nu-mi plac aceste probleme în care se cere aparent un răspuns greu de găsit, în condiţiile în care de fapt se cunoaşte cu mult mai mult decât întrebarea pusă, care acum devine irelevantă. În cazul de faţă, o identitate este "mascată" prin expresii relativ complicate, iar întrebarea este ca şi cum chiar ar conta valorile lui x. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi toate perechile de numere reale* (a, b) *pentru care egalitatea*

$$|ax + by| + |bx + ay| = 2|x| + 2|y|$$

este adevărată pentru orice numere reale x *şi* y*.*

Soluţie. Aproape orice încercare duce la succes. Directa asignare de valori particulare simple $(0, \pm 1)$ numerelor x, y duce la suficientă informaţie pentru a deduce $\{a, b\} = \{0, \pm 2\}$. Nu cine ştie ce taxant ca abordare ... □

Subiectul (4)**.** *Se consideră pătratul* $ABCD$ *şi punctul* E *în interiorul unghiului* $\angle CAB$*, astfel încât măsura unghiului* $\angle BAE$ *este de* $15°$*, iar dreptele* BE *şi* BD *sunt perpendiculare. Demonstraţi că* $AE = BD$*.*

Soluţie. Dincolo de cele trei soluţii oficiale, bazate în principiu pe minime construcţii auxiliare, vă voi prezenta o trivială soluţie "trigonometrică".

Triunghiul ABE are unghiurile de măsuri $15°, 135°, 30°$. Din teorema sinusurilor avem $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{\sin 135°}{\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \sqrt{2}$, deci AE are lungimea unei diagonale a pătratului. □

Subiectele clasei a VII-a îmi par prea uşoare, relativ la această generaţie de foarte buni copii. În Bucureşti au fost 11 scoruri între 26 şi 28 de puncte, în timp ce la clasa a VIII-a plaja primelor 11 scoruri a fost între 17 şi 28 de puncte.

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.** *Determinaţi toate tripletele de numerele întregi* (x, y, z) *cu proprietatea că*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Soluţie. Soluţia oficială este bazată pe vechiul, clasicul, şi banalul rezultat că ecuaţia $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod 4$ implică $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod 2$. Prin aplicare repetată rezultă că $x = 8x', y = 8y', z = 8z'$, de unde $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2(x' + y' + z')$. Dar atunci trebuie să avem chiar $x' = 2x'', y' = 2y'', z' = 2z''$. Finalmente, $x''^2 + y''^2 + z''^2 = x'' + y'' + z''$, de unde x'', y'', z'' sunt 0 sau 1, deci x, y, z sunt 0 sau 16.

Din păcate, scriind ecuaţia sub forma $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 = 192$, rezultatul se poate obţine şi printr-o analiză exhaustivă – în definitiv, nu sunt atât de multe pătrate perfecte sub $192 < 14^2$. Cum metoda de mai sus merge pentru orice putere 2^n alta decât $2^4 = 16$, problema putea, şi trebuia, dată astfel, cu soluţia x, y, z fiind 0 sau 2^n. □

Soluţie Alternativă. Pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n(x + y + z)$. Presupunem că nu toate trei variabilele sunt egale cu 0 (ceea ce reprezintă soluţia trivială). Fie atunci 2^k cea mai mare putere a lui 2 care divide toate trei variabilele, deci $x = 2^k a, y = 2^k b, z = 2^k c$, aşadar $2^k(a^2 + b^2 + c^2) = 2^n(a + b + c)$. Trebuie evident $k \leq n$, altfel membrul stâng este mai mare decât cel drept. Pe de altă parte, dacă unul sau trei dintre a, b, c sunt impare, trebuie chiar $k = n$, iar dacă două dintre a, b, c sunt impare, atunci mai apare exact un factor 2 în stânga, şi cel puţin un factor 2 în dreapta, deci trebuie $k \geq n$. Prin urmare, întotdeauna trebuie $k = n$, cu $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, ceea ce forţează a, b, c să fie 0 sau 1. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi toate numerele reale* x *pentru care numărul* $a = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ *este întreg.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Deşi nu neapărat necesare, cunoştinţe despre ecuaţia de gradul 2 duc imediat la soluţie. Posibilitatea $a = 0$ duce la $x = -\dfrac{1}{2}$. Pentru $a \neq 0$, fie a întreg; atunci $ax^2 + 2(a - 1)x + 3a - 1 = 0$. Discriminantul redus al ecuaţiei este $\Delta = (a-1)^2 - a(3a-1) = -(a+1)(2a-1)$, iar condiţia $\Delta \geq 0$, pentru a avea soluţii reale, duce la $a = -1$, cu $x = -2$. □

Subiectul (4)**.** *Considerăm numărul natural nenul fixat* n. *Determinaţi numerele naturale nenule* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ *cu proprietatea că*

$$x_n x_{n+1} \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Soluţie. Deoarece mulţimea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este inclusă în mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, x_n\}$, rezultă

$$x_n x_{n+1} \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 2(1 + 2 + \cdots + x_n) = x_n(x_n + 1).$$

Atunci $x_{n+1} \le x_n + 1$, şi cum $x_n < x_{n+1}$ avem chiar $x_{n+1} = x_n + 1$. Prin urmare vom avea egalitate peste tot, adică $X = M$, şi atunci $x_k = k$ pentru orice $1 \le k \le n$, deci şi $x_{n+1} = n + 1$.

O problemă simpatică, unde brutala incluziune $X \subseteq M$ este suficientă pentru a aduce imediat concluzia, deşi suficient de obscură pentru a nu fi imediat disponibilă.

O soluţie mai "muncitorească" ar putea face apel la inegalităţile evidente $x_n + 1 \le x_{n+1}$ şi $x_{n-k} \le x_n - k$ pentru toţi $1 \le k \le n - 1$. Atunci avem $x_n(x_n + 1) \le x_n x_{n+1}$, dar şi

$$2(x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n) \le 2((x_n-(n-1))+\cdots+(x_n-1)+x_n) = 2nx_n-n(n-1).$$

Prin urmare $x_n(x_n+1) \le 2nx_n-n(n-1)$, sau $(x_n-(n-1))(x_n-n) \le 0$. Dar desigur $x_n \ge n$, prin urmare trebuie ca $x_n = n$, ceea ce implică şi egalităţile $x_n + 1 = x_{n+1}$ şi $x_{n-k} = x_n - k$ pentru toţi $1 \le k \le n - 1$, deci $x_k = k$ pentru toţi $1 \le k \le n + 1$. $\square$

6. Încheiere

Se continuă ţinerea în secret a autorilor problemelor date în concurs; pentru mine, efectul este doar de a nu şti pe cine blama pentru lipsa de interes, platitudinea, sau "fabricarea" unora dintre aceste probleme. Desigur – şi ştiu acest lucru din timpurile când participam şi eu la compunerea subiectelor – comisia de selecţie a problemelor este cumva la mila propunătorilor, a căror producţie descreşte alarmant, atât în cantitate, cât şi în calitate. Dar parcă, mai pe vremuri, mai compuneau şi membrii comisiei câteva probleme, care aduceau un suflu proaspăt şi o undă de interes. Sincer vorbind, dacă aş fi un concurent în zilele de azi, aş avea mari şanse să ies dezamăgit din sala de concurs, rezolvând probleme banale sau plicticoase, şi tânjind după vreo chestiune care să mă facă să-mi pun întrebări pe care, poate, nu mi le-am pus până atunci.