

Problemă. Se dau 20 de numere naturale nenule distincte mai mici decât 70. Să se arate că există 4 perechi de numere dintre cele 20 a căror diferență este aceeași.

* * *

Soluție: Fie a_1, a_2, \dots, a_{20} cele 20 de numere. Avem $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{20} < 70$. Problema cere să arătăm că sunt patru perechi de numere dintre acestea 20, care ne dau aceeași diferență. Avem:

$$0 < (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = a_{20} - a_1 \leq 68$$

Presupunem că între diferențele $a_{i+1} - a_i, i = \overline{1, 19}$ sunt cel mult 3 valori egale.

Avem atunci: $68 \geq a_{20} - a_1 \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 7 = 70$, adică $68 \geq 70$. Contradicție. Prin urmare avem patru diferențe egale.