Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale nenule cu proprietatea a^n divide b^{n+1} pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci a divide b.

* * *

Soluţia 1: (dată de *Alexandru Mihalcu, Paul Cristian Iacob, Ştefania Sabou şi Andreea Rotaru*)
Fie $d = (a, b)$ şi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = dx$, $b = dy$, $(x, y) = 1$. Din $a^n \mid b^{n+1}$, $\forall n$, rezultă $d^n x^n \mid d^{n+1} y^{n+1}$, $\forall n$, adică $x^n \mid dy^{n+1}$, $\forall n$. Cum însă $(x, y) = 1$, de aici rezultă $x^n \mid d$, $\forall n$, adică $x^n \leq d$, $\forall n$. Deoarece orice număr natural $x > 1$ are puteri oricât de mari, adică şi puteri mai mari decât d, obţinem că $x = 1$, adică $a = d$, deci $a \mid b$.

Soluţia 2: Dacă $a = 1$ afirmaţia din enunţ este evidentă. În continuare presupunem $a \geq 2$. Din $a \mid b^2$ rezultă că orice factor prim al lui a este şi factor prim al lui b. Mai rămâne să arătăm că, pentru orice factor prim p al lui a, exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui a este mai mic sau egal decât exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui b. Fie p un factor prim al lui a, α exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui a şi β exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui b. Din $a^n \mid b^{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ rezultă $\alpha n \leq \beta(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, adică $\dfrac{\alpha}{\beta} \leq \dfrac{n+1}{n}$, sau, scăzând 1, $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta} \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Dacă $\alpha > \beta$, ar rezulta $n \leq \dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ceea ce este absurd (există numere naturale oricât de mari). Prin urmare $\alpha \leq \beta$, ceea ce trebuia demonstrat.