Problema 2:

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $A_n=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ \left[\frac{nx}{x+1}\right]+\left[\frac{n}{x+1}\right]=n\right\}$, unde $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *y*. Să se determine n pentru care mulțimea A_n are 2018 elemente.

Dan Popescu

Soluție:

Cum $\left[\frac{nx}{x+1}\right]-n=\left[\frac{nx}{x+1}-n\right]=\left[-\frac{n}{x+1}\right]$, iar $[-y]+[y]=0$ dacă și numai dacă $y\in\mathbb{Z}$, avem:

$$\left[\frac{nx}{x+1}\right]+\left[\frac{n}{x+1}\right]=n \Leftrightarrow \left[-\frac{n}{x+1}\right]+\left[\frac{n}{x+1}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{n}{x+1}=k,\ k\in\mathbb{Z}$$

ceea ce conduce la $x=-1+\frac{n}{k},\ k\in\mathbb{Z}^*$.

Cum $-1+\frac{n}{k}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k/n \Leftrightarrow k\in\left\{\pm m\ /\ m\in D_n\right\}$, unde $D_n=\left\{m\in\mathbb{N}^*: m/n\right\}$, rezultă $\text{card}(A_n)=2\cdot\tau(n)$. Prin urmare $\text{card}(A_n)=2018 \Leftrightarrow \tau(n)=1009$.

Dacă descompunerea în factori primi a numărului n este $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{a_s}$, atunci $\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_s+1)$. Cum $\tau(n)=1009$ și 1009 este număr prim, rezultă că $n=p^{1008}$, *p* prim.