

Problema 4. Un pătrat 3×3 este împărțit în nouă pătrățele 1×1 . Fie M mulțimea centrelor acestor nouă pătrățele.

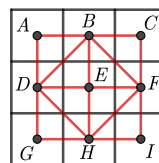
- a) Arătați că există 6 pătrate care au toate vârfurile în mulțimea M .
 b) Pe fiecare punct din mulțimea M se scrie unul din numerele de la 1 la 9 astfel încât fiecare număr să fie folosit exact o dată și, pentru fiecare din cele șase pătrate care au vârfurile în M , suma numerelor scrise pe cele patru vârfuri ale sale să fie aceeași.

În câte moduri se poate face etichetarea vârfurilor ca să fie îndeplinite condițiile de mai sus?

Olimpiadă Rusia, 1998

Soluție:

- a) Notând centrele pătratelor formate cu $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ ca în figura alăturată, se formează următoarele 6 pătrate: $ABED, BCFE, DEHG, EFIH, ACIG$ și $BFHD$.



- b) Notând cu $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ numerele scrise pe punctele $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ și cu s valoarea comună a sumei numerelor din vârfurile fiecăruia din cele șase pătrate, avem $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $a + b + e + d = b + c + f + e = d + e + h + g = e + f + i + h = a + c + i + g = b + f + h + d = s$. Atunci $4s = (a + b + e + d) + (b + c + f + e) + (d + e + h + g) + (e + f + i + h) = (a + c + i + g) + 2(b + f + h + d) + 4e = 3s + e$, de unde $s = 4e$.

Pe de altă parte, $45 = a + b + c + d + e + f + g + h + i = (a + c + i + g) + (b + f + h + d) + e = s + s + e = 4e + 4e + e = 9e$, de unde $e = 5$ și $s = 20$.

Deoarece 5 este în centru, 1 și 5 vor face parte dintr-un același pătrat. Împreună cu ele trebuie să apară două numere (diferite de ele și diferite între ele) care au suma 14. Acestea nu pot fi decât 8 și 6, deci 1 și 5 fac parte (împreună) dintr-un singur pătrat, prin urmare 1 trebuie să se afle într-un colț, iar 6 și 8 trebuie să fie în pătratele vecine respectivului colț. Similar, 9 trebuie să se afle într-un colț: cu 5 și 9 într-un același pătrat trebuie să se mai afle numerele 2 și 4. Prin urmare, lângă 9 trebuie să stea numerele 2 și 4, prin urmare 9 trebuie să stea în colțul opus lui 1. În fine, față de diagonala $1 - 5 - 9$, numerele 4 și 6 trebuie să se afle de părți diferite (altfel în colțul pătratului în care se află deja 4, 5 și 6 ar trebui pus din nou 5). În concluzie, colțul în care se află numărul 1 poate fi ales în 4 moduri, apoi partea diagonalei de care se află numerele 4 și 2 (și deci și 8) poate fi aleasă în două moduri, prin urmare sunt 8 etichetări posibile ale elementelor lui S .