

Clasa a X-a - Etapa 5 - Problema 2

Enunț: Fie $\{a_1, a_2, \dots, a_9\} \subset \mathbb{R}$. Demonstrați că există $x, y \in \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$, distincte, astfel încât

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{2}-1.$$

Soluție. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $a_1 < a_2 < \dots < a_9$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(u) = \operatorname{arctg} u$ este bijectivă și strict crescătoare. Atunci

există $b_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, astfel încât $f(a_i) = b_i$. Deoarece

$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, atunci există $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ astfel încât $0 < b_{j+1} - b_j < \frac{\pi}{8}$. Atunci

$0 < \operatorname{tg}(b_{j+1} - b_j) < \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, de unde obținem $0 < \frac{a_{j+1} - a_j}{1 + a_{j+1}a_j} < \sqrt{2} - 1$.