P2. Fie $n, r \in \mathbb{N}$, cu $n \geq r \geq 1$, iar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătaţi că $rang(A) = r$ dacă şi numai dacă există $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$ cu coloanele liniar independente şi $C \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$ cu liniile linar independente, astfel încât $A = BC$.

R: Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are rangul r, există $U, V \in GL_n(\mathbb{C})$(i.e., matrice inversabile) astfel încât

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \overset{not}{=} E.$$

Cum $E^2 = E$, rezultă că $A = U^{-1}E \cdot EV^{-1}$. Evident, $U^{-1}E = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times(n-r)} \end{bmatrix}$, cu $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$, iar $EV^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ 0_{(n-r)\times n} \end{bmatrix}$, cu $C \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$. Cum $rang(B) = rang(U^{-1}E) = rang(E) = r$, B are coloanele liniar independente. Din $rang(C) = rang(EV^{-1}) = reng(E) = r$ rezultă că C are liniile liniar independente. În plus, are loc egalitatea

$$A = BC + 0_{n\times(n-r)} \cdot 0_{(n-r)\times n} = BC.$$

Reciproc, dacă există $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$ cu coloanele liniar independente şi $C \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$ cu liniile linar independente, astfel încât $A = BC$, rezultă că $rang(B) = rang(C) = r$. Atunci există $U, V \in GL_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$UB = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(n-r)\times r} \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad CV = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

şi rezultă că

$$UAV = UB \cdot CV = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(n-r)\times r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

astfel că $rang(A) = r$.