PATRULATERE INSCRIPTIBILE

Rezumat. În articolul de față sunt prezentate condiții necesare și suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, precum și câteva probleme reprezentative.

Lecția se adresează clasei a VIII-a.

Autor: Ion Cicu, profesor, Școala nr. 96, București

Data: noiembrie 2011

Noțiuni introductive

Pentru o bună înțelegere a noțiunilor legate de patrulaterul inscriptibil, este necesar să reamintim câteva rezultate privind legătura dintre măsura unghiurilor și măsura unor arce de cerc. Este bine cunoscut rezultatul următor:

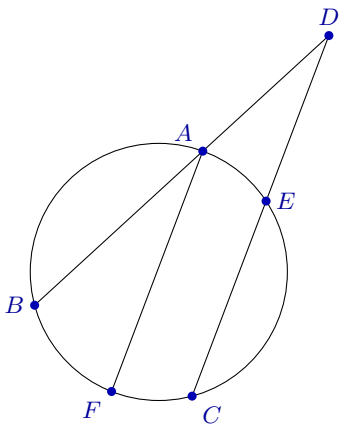
Teoremă. Măsura unghiului înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi.

Vom prezenta mai jos încă două rezultate, unul legat de unghiul exterior unui cerc și altul legat de unghiul interior unui cerc.

Definiție. Numim *unghi exterior unui cerc* unghiul cu vârful în exteriorul cercului și laturile secante la cerc.

Teoremă. Măsura unghiului exterior unui cerc este egală cu semidiferența arcelor cuprinse între laturi.

Demonstrație. Trebuie demonstrat că $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AE})}{2}$.

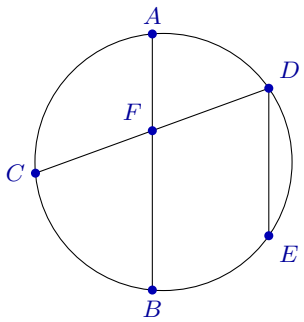


Construind $AF \parallel DC$, avem $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAF}$ (unghiuri corespondente). Cum unghiul BAF este unghi înscris în cerc, avem $m(\widehat{BAF}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BF})}{2} = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{FC})}{2}$. Deoarece $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAF}$, putem scrie $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{FC})}{2}$. Din $EC \parallel AF$ rezultă $m(\overset{\frown}{FC}) = m(\overset{\frown}{AE})$ și atunci $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AE})}{2}$.

Definiție. Numim *unghi interior unui cerc* unghiul cu vârful în interiorul cercului și laturile coarde în cerc.

Teoremă. Măsura unghiului interior unui cerc este egală cu semisuma arcelor cuprinse între laturi.

Demonstrație. Trebuie demonstrat că $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$.



Construind $DE \parallel AB$, avem $\widehat{CFB} \equiv \widehat{CDE}$ (unghiuri corespondente). Cum unghiul CDE este unghi înscris în cerc, avem $m(\widehat{CDE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CE})}{2} = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{BE})}{2}$. Deoarece $\widehat{CFB} \equiv \widehat{CDE}$, putem scrie $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{BE})}{2}$. Din $DE \parallel AB$ rezultă $m(\overset{\frown}{BE}) = m(\overset{\frown}{AD})$ și atunci $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$.

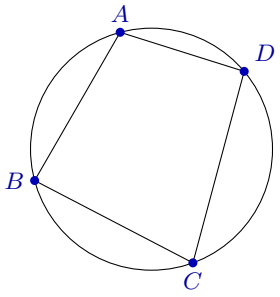
Definiție. Numim *patrulater inscriptibil* un patrulater ale cărui vârfuri sunt pe un cerc.

Observație. Dacă A, B, C, D sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil, se spune că punctele A, B, C, D sunt conciclice.

Condiții necesare și suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.

Demonstrație. Demonstrăm implicația: dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil, atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ și $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$.

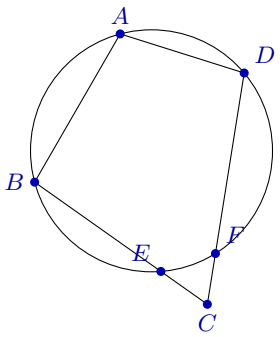


Unghiurile BAD și BCD sunt unghiuri înscrise în cerc, deci $m(\widehat{BAD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BCD})}{2}$ și $m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2}$. Atunci

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \frac{m(\overset{\frown}{BCD})}{2} + \frac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Analog pentru unghiurile ABC și ADC.

Demonstrăm acum implicația: dacă $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$, atunci $ABCD$ este patrulater inscriptibil. Presupunem că cele patru puncte A, B, C, D nu sunt pe un cerc. Trei puncte necoliniare sunt întotdeauna pe un cerc; fie acestea A, B și D. Dacă C nu se află pe cercul determinat de punctele A, B și D, atunci el este în interiorul sau în exteriorul acestui cerc. Considerăm cazul în care punctul C este în exterior; cazul în care C este în interior se tratează analog, folosind teorema despre unghiul interior unui cerc. Fie E, respectiv F intersecțiile cercului cu BC, respectiv DC.



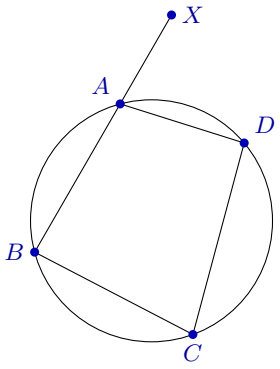
Avem $m(\widehat{BAD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BEFD})}{2}$ (unghi înscris în cerc) și $m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BAD}) - m(\overset{\frown}{EF})}{2}$ (unghi exterior cercului). Atunci

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \frac{m(\overset{\frown}{BEFD})}{2} + \frac{m(\overset{\frown}{BAD}) - m(\overset{\frown}{EF})}{2} = \frac{360^\circ - m(\overset{\frown}{EF})}{2} < 180^\circ.$$

Această ultimă afirmație este în contradicție cu ipoteza $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și deci punctele A, B, C, D sunt pe același cerc.

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă un unghi interior este congruent cu unghiul exterior opus.

Demonstrație. Teorema este o consecință a teoremei anterioare.



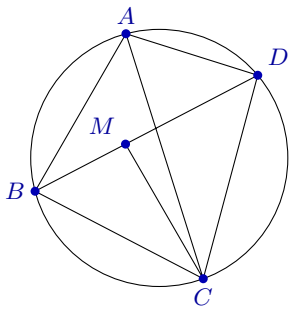
Din $\widehat{BCD} \equiv \widehat{XAD}$ și $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAX}) = 180^\circ$ rezultă $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$ și am ajuns la teorema anterioară.

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiul format de o diagonală cu una dintre laturi este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Demonstrație. Ar trebui demonstrat, de exemplu, că $ABCD$ este patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow \widehat{DBC} \equiv \widehat{DAC}$. Lăsăm această demonstrație ca exercițiu.

Teoremă (teorema lui Ptolemeu). Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Demonstrație. Se pot da mai multe demonstrații acestei teoreme. O preferăm pe aceasta, deoarece este mai accesibilă.



Considerăm un punct M în același semiplan cu A față de dreapta BC, astfel încât $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$ și $\widehat{MCB} \equiv \widehat{ACD}$. De aici deducem că $\triangle MBC \sim \triangle DAC$. Atunci

$$\frac{MB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{MC}{DC}, \quad \text{de unde} \quad MB = \frac{AD \cdot BC}{AC} \quad (*).$$

Pe de altă parte, din $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MC}{DC}$ și $\widehat{MCD} \equiv \widehat{BCA}$ rezultă $\triangle MCD \sim \triangle BCA$ și atunci

$$\frac{MD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{MC}{BC}, \quad \text{de unde} \quad MD = \frac{AB \cdot CD}{AC} \quad (**).$$

Să demonstrăm acum afirmația: dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil, atunci $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil, atunci $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DBC}$ și, cum din construcție $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$, rezultă $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DBC}$, de unde $M \in (BD)$. Atunci $BD = BM + MD$. Înlocuind BM și MD cu rezultatele obținute la $(*)$ și $(**)$, rezultă

$$BD = \frac{AD \cdot BC}{AC} + \frac{AB \cdot CD}{AC},$$

de unde relația $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

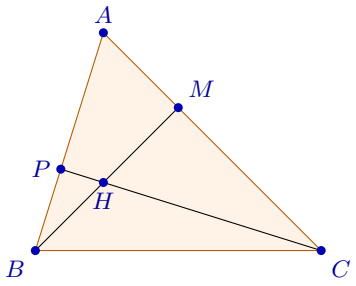
Să demonstrăm acum afirmația: dacă $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, atunci $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Relația $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ se scrie $BD = \frac{AD \cdot BC}{AC} + \frac{AB \cdot CD}{AC}$ și, ținând cont de $(*)$ și $(**)$, avem $BD = BM + MD$, de unde $M \in (BD)$. Atunci $\widehat{DBC} \equiv \widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$ și, conform teoremei anterioare, rezultă că $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Probleme

Problema 1. În triunghiul ABC, înălțimile BM ($M \in (AC)$) și CP ($P \in (AB)$) se intersectează în H. Arătați că patrulaterele $APHM$ și $BCMP$ sunt inscriptibile.

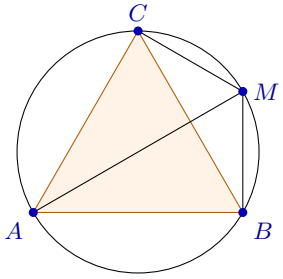
Soluție. Deoarece BM este înălțime, $m(\widehat{BMA}) = 90°$. Analog, $m(\widehat{CPA}) = 90°$.



Atunci, în patrulaterul $APHM$, avem $m(\widehat{AMH}) + m(\widehat{APH}) = m(\widehat{BMA}) + m(\widehat{CPA}) = 180°$, deci patrulaterul este inscriptibil (unghiurile opuse sunt suplementare).

În patrulaterul $BCMP$ avem $\widehat{BPC} \equiv \widehat{BMC}$ $(= 90°)$ și deci este inscriptibil (unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă).

Problema 2. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului. Arătați că $MA = MB + MC$.



Soluție. Patrulaterul $ABMC$ este înscris în cerc și atunci, din teorema lui Ptolemeu, avem

$$AM \cdot BC = BM \cdot AC + CM \cdot AB.$$

Cum $[AB] \equiv [AC] \equiv [BC]$, rezultă $AM = MB + MC$.

Bibliografie

[1] M. E. Panaitopol, L. Panaitopol, *Probleme calitative de geometrie plană*, Editura Gil, 1996.
[2] D. Mihalca, I. Chițescu, M. Chiriță, *Geometria patrulaterului*, Editura Teora, 1998.