Clasa a IX-a, Gazeta Matematica nr. 3

27811. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \parallel CD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Demonstraţi că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine dreptei AC dacă şi numai dacă $\dfrac{CP - AM}{CN} = \dfrac{AB}{BC}$.

Traian Preda, Bucureşti

27812. Arătaţi că, pentru orice numere reale x şi y, există două numere întregi a şi b, nu ambele nule, cu $|a|, |b| \leqslant 18$, astfel încât:

$$|a \sin x + b \cos y| < \frac{1}{9}.$$

Mihai Teişanu şi *Felician Preda*, Craiova

27813. Fie $n \geqslant 1$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ numere reale strict pozitive în progresie aritmetică, iar $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ numere reale strict pozitive, distincte, în progresie geometrică astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1}$. Arătaţi că pentru orice număr natural impar k, cu $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$, există un număr natural p astfel încât

$$a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+k-1} > b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{p+k-1}.$$

Traian Preda, Bucureşti

S:L20.81. Fie un cerc $C(O, r)$. Construiţi în exteriorul său trei puncte distincte P, Q, R astfel încât $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ şi punctele P, Q, R să aibă puteri egale faţă de cercul dat.

Ion Pătraşcu, Craiova

S:L20.82. Fie a un număr real oarecare. Arătaţi că pentru orice x şi y strict pozitive are loc relaţia

$$\frac{1}{x \sin^2 a + y \cos^2 a} + \frac{1}{y \sin^2 a + x \cos^2 a} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

S:L20.83. Considerăm cele 64 de centre ale pătrăţelelor unei table de şah. Construim 73 de segmente cu capetele în câte două din aceste puncte. Arătaţi că există două segmente paralele, sau incluse în aceeaşi dreaptă.

Maria Preda, elevă, Craiova

S:L20.84. Fie numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a \leq b \leq c$. Demonstraţi că

$$3 \leq \frac{3a^2 - 2ab + 3b^2}{(a+b)^2} + \frac{3b^2 - 2bc + 3c^2}{(b+c)^2} + \frac{3c^2 - 2ac + 3a^2}{(c+a)^2} \leq \frac{9}{4}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}.$$

S:L20.87. Arătaţi că $2^{97} > 3^{61}$.

Dan Andrei Tudor, elev, Bucureşti