Clasa a VII-a

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez înscris în centrul de centru O, $DC \parallel AB$ şi $DC < AB$. Notăm cu T intersecţia dreptelor AD şi BC. Dreapta TO intersectează arcul mic DC în M şi diagonala AC în E. Arătaţi că

a) $\triangle TCE \sim \triangle BOE$;

b) $\dfrac{TM}{OM} = \dfrac{ME}{OE}$.

Traian Preda

Soluție:

a) $ABCD$ este trapez isoscel $\implies T, M, E, O$ sunt coliniare. M este mijlocul arcului $DC \implies AM$ este bisectoarea $\angle DAC$. Deoarece TM este bisectoarea $\angle ATB$, M este centrul cercului inscris triunghiului TAC. Astfel CM este bisectoarea $\angle TCA$. De aici $\angle TEC \equiv \angle AEO \equiv \angle BEO$ **2p**

Dar $m(\angle EOB) = m(\overset{\frown}{MB}) = m(\overset{\frown}{MA}) = 2 \cdot m(\angle ACM) = m(\angle ACT) = m(\angle ECT)$. Astfel $\triangle TCE \sim \triangle BOE (U.U.)$ **2p**

b) Din $\triangle TCE \sim \triangle BOE$ (U.U.) obţinem:
$\dfrac{TC}{BO} = \dfrac{CE}{OE} = \dfrac{ET}{EB}$, deci $\dfrac{TC}{CE} = \dfrac{BO}{OE}$ **1p**
Aplicăm teorema bisectoarei in $\triangle TCE$
$\dfrac{TM}{ME} = \dfrac{TC}{CE} = \dfrac{BO}{OE} = \dfrac{MO}{OE} \implies \dfrac{TM}{MO} = \dfrac{ME}{EO}$ **2p**