**P3.** Fie $a \in \mathbb{R}$ oarecare şi $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$x_1 = a \quad \text{şi} \quad e^{x_{n+1}} + x_{n+1} = x_n + 1, \ (\forall) n \geq 1.$$

Studiaţi convergenţa şirului $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n, (\forall) n \geq 1$.

**R:** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 + x$. Funcţia $f$ este strict crescătoare ca sumă de funcţii strict crescătoare, este continuă şi derivabilă, cu derivata nenulă, şi cum $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, rezultă că $f$ este bijectivă.
Fie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ inversa funcţiei $f$. Atnci $g$ este bijectivă, strict crescătoare, continuă şi derivabilă, cu $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, şi $g(x_n) = x_{n+1}$, $(\forall) n \geq 1$. Cum $|g'(x)| = \frac{1}{|f'(g(x))|} = \frac{1}{1+e^{g(x)}} < 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc

$$|x_{n+1}| = |g(x_n) - 0| = |g(x_n) - g(0)| = |x_n| \cdot |g'(c_n)| \leq |x_n|,$$

astfel că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Cum $f(0) = g(0) = 0$, dacă $a = 0$, atunci $x_n = 0, (\forall) n \geq 1$; dacă $a > 0$, atunci $x_n > 0, (\forall) n \geq 1$; iar dacă $a < 0$, atunci $x_n < 0, (\forall) n \geq 1$. Rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, deci convergent la o limită $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = l \in [-a, a]$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $e^l = 1$, deci $l = 0$.
Pentru a studia convergenţa şirului $(y_n)_{n\geq 1}$ folosim criteriul raportului. Avem că

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{e^{x_{n+1}-1+x_{n+1}}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{e^{x_{n+1}-1}}{x_{n+1}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

astfel că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.