COMENTARII BACALAUREAT 2012
– MATEMATICĂ M1 –

ABSTRACT. Comments on the Bacalaureat 2012.

Data: 5 iulie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. INTRODUCERE

Prezentarea, augmentată cu comentarii asupra sesiunii de Bacalaureat 2012 M1, este opinia personală a autorului. Mi-am pierdut de mult încrederea în acurateţea şi didacticismul soluţiilor şi baremelor oficiale, pentru a nu contribui o părere personală şi certificată. Desigur, presupun că soluţia mea care urmează **nu ar fi primit** punctajul maxim!

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. SUBIECTUL I

Punct (1)**.** *Calculaţi modulul numărului complex* $(1+i)^2$.

Soluţie. $|(1+\mathrm{i})^2| = |1+\mathrm{i}|^2 = (\sqrt{1+1})^2 = 2$. $\square$

Punct (2)**.** *Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dată prin* $f(x) = x^2 + 2x$ *şi* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dată prin* $g(x) = -x - 2$.

Soluţie. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ revine la $x^2 + 3x + 2 = 0$, cu rădăcinile -1 şi -2, deci punctele de intersecţie sunt $P_1(-1,-1)$ şi $P_2(-2,0)$. $\square$

Punct (3)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia* $2^{x+1} \leq 4$.

Soluţie. $2^{x+1} \leq 4 = 2^2$ conduce (prin logaritmare, sau prin monotonia funcţiei exponenţiale) la $x+1 \leq 2$, deci $x \in (-\infty, 1]$. $\square$

Punct (4)**.** *Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulţimile cu trei elemente ale mulţimii* $A = \{1,2,3,4,5\}$, *elementele submulţimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.*

Soluţie. Există cu totul $C_5^3 = 10$ submulţimi cu trei elemente ale lui A, şi patru dintre ele sunt după cum cerut, anume $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\}$. Prin urmare probabilitatea este $P = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0,4$. $\square$

Punct (5)**.** *Se consideră vectorii* $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ *şi* $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$*. Determinaţi numărul real* a *pentru care* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Soluţie. $3 = \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot a + (-2) \cdot (-1) = a + 2$ duce la $a = 1$. □

Punct (6)**.** *Calculaţi cosinusul unghiului* A *al triunghiului* ABC *în care* $AB = 4$, $AC = 5$ *şi* $BC = 7$.

Soluţie. Din formula cosinusului unui unghi (teorema Pitagora generalizată) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ rezultă $\cos A = -\dfrac{7^2 - 4^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\dfrac{1}{5}$. □

3. Subiectul II

Punct (1)**.** *Se consideră sistemul* $\begin{cases} 2x + \ y + 3z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + \ y + mz &= 0 \end{cases}$*, unde* $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi determinantul matricei sistemului.

b) Determinaţi valorile reale ale lui m *pentru care sistemul are soluţie unică.*

c) În cazul $m = 2$*, determinaţi soluţia* (x_0, y_0, z_0) *a sistemului, pentru care* $x_0 > 0$ *şi* $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

Soluţie. a) Avem det $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} = 3m - 6$, de exemplu dezvoltând după linia a treia a determinantului.

b) Cum determinantul se anulează doar pentru $m = 2$, rezultă soluţie (trivială $x = y = z = 0$) unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Pentru $m = 2$, din ultimele două linii $\begin{cases} 2y + 3z &= -x_0 \\ y + 2z &= -x_0 \end{cases}$ rezultă soluţia $y_0 = x_0$ şi $z_0 = -x_0$. Pentru a avea $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$ trebuie deci $3x_0^2 = 3$, prin urmare $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ (pentru a satisface $x_0 > 0$). □

Punct (2)**.** *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *şi mulţimea* $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$.

a) Arătaţi că $X(p) \cdot X(q) \in G$ *pentru orice* $X(p), X(q) \in G$.

b) Admitem că $(G, \cdot)$ *este un grup comutativ având element neutru* $X(0)$*. Determinaţi inversul elementului* $X(p)$ *în acest grup.*

c) Rezolvaţi ecuaţia $X(p)^3 = I_2 + 7A$*, unde* $X(p) \in G$.

Soluţie. În totalitatea ei, problema este "întoarsă pe dos", la fel ca cea de la acelaşi punct, din Bacalaureatul Special 2012.[1] Ni se spune că avem de a face cu o lege de compoziţie (internă) pe G, dar ni se cere doar să verificăm că mulţimea G este închisă la înmulţirea matricelor; se "admite" că legea

[1] Comentariile mele se află pe acest site, din 5 iunie 2012.

este de grup comutativ. Verificarea directă a axiomelor de grup ar duce la calcule relativ inutile, în lumina observaţiei care urmează.

Ceea ce contează este că matricea A este idempotentă, adică $A^2 = A$ (s-ar fi putut da exact aceeaşi problemă pentru orice matrice (pătrată) idempotentă, de orice ordin). Pentru matricea noastră, acest fapt rezultă prin simplu calcul, sau din ecuaţia Hamilton-Cayley, căci avem $\operatorname{tr} A = 1$ şi $\det A = 0$. Atunci vom avea deci $X(p) \cdot X(q) = (I_2 + pA)(I_2 + qA) = I_2 + pA + qA + pqA^2 = I_2 + (p + q + pq)A = I_2 + rA = X(r)$, unde $r = p + q + pq = (p + 1)(q + 1) - 1 \neq -1$ căci $p \neq -1$ şi $q \neq -1$, ceea ce rezolvă cerinţa a).

S-a pus şi aici căruţa înaintea boilor ... Funcţia $f\colon G \to \mathbb{R}^*$, dată prin $f(X(x)) = x + 1$, este clar bijectivă, cu inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^* \to G$ dată prin $f^{-1}(x) = X(x - 1)$. Ea permite un "transport de structură" al structurii de grup comutativ multiplicativ din $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ pe mulţimea G, prin definirea pe G a legii de compoziţie $X(x) \cdot X(y) = f^{-1}(f(X(x))f(X(y)))$, care se vede că este chiar cea dată în problemă, adică legea de înmulţire a matricelor. **Acum toate întrebările au răspuns imediat; legea de compoziţie este asociativă, comutativă, are ca element neutru $f^{-1}(1) = X(0)$, admite ca element invers pentru $X(x) \in G$ pe $f^{-1}(1/f(X(x)))$, iar funcţia f este izomorfism de grupuri, prin însuşi modul în care a fost folosită.**

Pentru punctul b), inversul elementului $X(p)$ va fi deci

$$f^{-1}\left(\frac{1}{f(X(p))}\right) = X\left(\frac{1}{p+1} - 1\right) = X\left(-\frac{p}{p+1}\right).$$

Pentru punctul c), să observăm că $I_2 + 7A = X(7)$, deci ecuaţia dată se transportă în $f(X(p))^3 = f(X(7))$ în $\mathbb{R}^*$, adică $(p + 1)^3 = 7 + 1 = 8 = 2^3$, cu unica soluţie reală $p = 1$. □

4. Subiectul III

Punct (1). *Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x^3 - 12x$.*

a) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$.

b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{f(x)}$.

c) Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $f(x) = a$ are trei soluţii reale distincte.

Soluţie. a) Rădăcinile derivatei $f'(x) = 3(x^2 - 4)$ sunt ± 2, si cum $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 2$, vom avea f (strict) crescătoare pe intervalul $[2, \infty)$.

b) Aplicând în mod repetat regula lui l'Hôpital obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3 - 12x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2 - 12} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty,$$

deşi acesta este un exerciţiu de clasă, specificând că pentru orice polinom $P(x)$ cu coeficienţi reali şi coeficient dominant pozitiv avem $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \infty$, prin urmare limita cerută aproape că nu ar fi necesitat nicio argumentare suplimentară.

c) Cum am calculat deja rădăcinile derivatei ca fiind ± 2, şi cum putem uşor calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 16$, $f(2) = -16$, şi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, trebuie ca $a \in (-16, 16)$. $\square$

Punct (2)**.** *Se consideră funcţia* $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, *dată prin* $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.

a) Arătaţi că orice primitivă a lui f *este strict crescătoare pe* $(-1,\infty)$.

b) Calculaţi $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$.

c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{2x} f(t)\,dt}{x}$.

Soluţie. Avem $f(x) = \frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$, deci f este crescătoare pe $(-1,\infty)$, şi deci $f(x) \geq f(-1) = 1 > 0$.

a) Derivata oricărei primitive F a lui f fiind $F' = f$, rezultă că primitiva este strict crescătoare.

b) Avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (\ln(x+1) + \ln(x+2))\Big|_0^1 = \ln 3.$$

c) Avem

$$\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \left(2 - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = (2t - \ln(t+2))\Big|_x^{2x} = 2x - \ln\frac{2x+2}{x+2},$$

aşa că $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(2x - \ln\frac{2x+2}{x+2}\right) = 2.$ $\square$

5. Încheiere

Desigur, aceste subiecte de bacalaureat sunt menite mai degrabă a face o bună verificare a cunoştinţelor dobândite în şcoală, şi nu de a favoriza creativitatea, ca cele de olimpiadă. Nu pot să mă împiedic însă să critic platitudinea lor, şi modul oarecum mecanic de a verifica aceste cunoştinţe, în loc de a favoriza buna intuiţie, conceptele (transport de structură, simetrii), metodele conceptuale – mai degrabă decât tehnicile aride.

O ultimă constatare; am parcurs şi subiectele de Bacalaureat M2, şi într-adevăr, ele par pe alocuri chiar mai complicate decât cele M1, spre disperarea celor ce au avut a le rezolva!