Problema 1. Fie a, b, c numere raţionale cu proprietatea că

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} = \frac{1}{a+b}.$$

Să se arate că numărul $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ este raţional.

Soluţie: Prin calcul direct se obţine succesiv:

$$(a+b)^2 c + (a+b)^2 = ab(c^2+1) + c(a^2+b^2) \Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 = ab(c-1)^2.$$

Dacă $c = 1$ atunci relaţia din ipoteză devine $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+a} = \frac{1}{a+b}$, fals. Deci $ab = \left(\frac{a+b}{c-1}\right)^2$ şi deci $(c-3)(c+1) = \left(\frac{(a-b)(c-1)}{a+b}\right)^2$.

Prin urmare

$$\sqrt{\frac{c-3}{c+1}} = \frac{\sqrt{(c-3)(c+1)}}{c+1} = \frac{|a-b| \cdot |c-1|}{(c+1) \cdot |a+b|} \in \mathbb{Q}.$$