Problema 2. Numerele întregi şi nenule a, b, c verifică relaţia

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Arătaţi că cel puţin unul din numerele a, b sau c are modulul egal cu 1.

Cristian Mangra, Bucureşti şi Lucian Petrescu, Tulcea

Soluţie: Presupunem că $|a| \geq 2$ şi $|b| \geq 2$ şi $|c| \geq 2$. Atunci

$$1 \leq |a + b + c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \leq \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq \frac{3}{2},$$

şi deci $|a + b + c| = 1$.

Dacă a, b şi c ar fi impare, atunci

$$1 = |a + b + c| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

adică ar rezulta că $|a| = |b| = |c| = 3$; de aici obţinem că $a + b + c$ este multiplu de 3, fals, căci $|a + b + c| = 1$.

Dacă două dintre ele ar fi pare şi al treilea impar, atunci am obţine

$$1 = |a + b + c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

fals câtă vreme $2 + 3 + 6 = 11 \neq 1$.

Prin urmare unul din cele trei numere trebuie să aibă modulul egal cu 1.