

Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 1

Enunț: Fie $U_n = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \right\}$. Demonstrați că:

- a) $U_n \subset U_m$ dacă și numai dacă $n \mid m$;
- b) $U_m \cap U_n = U_{(m,n)}$.

Soluție: Punctul a) se bazează pe faptul că dacă $n \mid m$ atunci $m = nd$ și $x^m = (x^n)^d$. Pentru punctul b) folosim faptul că există $u, v \in \mathbb{Z}$ cu $mu + nv = (m, n)$ și $x^{(m,n)} = (x^m)^u (x^n)^v$. ■