



Problema 1. Determinați numerele \overline{abcd} astfel încât

$$a \cdot (b+c) + d \cdot (a+b) + c \cdot (b+d) = \overline{ab} \cdot (10c+d).$$

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Soluție

Din enunț a este cifră nenulă. Relația din enunț se mai scrie $a^2b + ac + da + db + cb + cd = (10a+b)(10c+d)$
 $\Leftrightarrow ab + ac + da + db + cb + cd = 10a(10c+d) + b \cdot (10c+d)$
 $\Leftrightarrow ab + ac + ad + \underline{bd} + bc + cd = 100ac + 10ad + 10bc + \underline{bd}$
 $\Rightarrow ab + \underline{ac} + ad + bc + cd = 100ac + 10ad + 10bc.$

Scădem ac

$$ab + \underline{ad} + bc + cd = 99ac + 10ad + 10bc.$$

Scădem $(ad + bc)$

$$\Rightarrow ab + cd = 99ac + 9ad + 9bc \quad (1)$$

Inșă $ab + cd \leq 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \Rightarrow ab + cd$ poate fi cel mult

$$81 \cdot 2 = 162$$

$$\text{Dar, din (1)} \Rightarrow 99ac \leq ab + cd \Rightarrow 99ac \leq 162 \quad | :9$$

$\Rightarrow 11ac \leq 18$. Deci a, c poate fi 0 sau 1.

Cazul I $a, c = 0 \Rightarrow c = 0$ și $a \neq 0$ cifră oarecare \Rightarrow Relația

$$(1) \text{ devine: } ab + 0 = 0 + 9ad + 0 \Rightarrow ab = 9ad \quad | :a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 9d \text{ și, cum } b \text{ și } d \text{ sunt cifre} \Rightarrow b = 0, d = 0 \text{ sau}$$

$$b = 9, d = 1 \Rightarrow \overline{abcd} \in \{ \overline{a000}, \overline{a901} \} \Rightarrow 9 + 9 = 18 \text{ soluții}$$

Cazul II $a, c = 1 \Rightarrow a = c = 1 \Rightarrow$ Relația (1) devine $b + d = 99 + 9d$

$$+ 9b \Rightarrow 8b + 8d + 99 = 0 \text{ Fals}$$

$$\text{Deci, } \overline{abcd} \in \{ 1000, 2000, \dots, 9000; 1901, 2901, 3901, \dots, 9901 \}$$

Soluție dată de elevul ILIESCU NAVIA, clasa a VI-a, CN, GH. TITICA,