

Etapa 7, Problema 3

Determinați numerele reale x, y și z care verifică simultan condițiile

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1} = 15 \\ 3^{2x+\sqrt{3y+1}} + 3^{3y+\sqrt{4z+1}} + 3^{4z+\sqrt{2x+1}} = 3^{30} \end{cases}$$

Marcel Chiriță

Soluție.

Cu notațiile $\sqrt{2x+1} = a$, $\sqrt{3y+1} = b$ și $\sqrt{4z+1} = c$, obținem sistemul

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ 3^{a^2-1+b} + 3^{b^2-1+c} + 3^{c^2-1+a} = 3^{30} \end{cases}$$

Din inegalitatea mediilor,

$$3^{30} = 3^{a^2-1+b} + 3^{b^2-1+c} + 3^{c^2-1+a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{3^{a^2-1+b} \cdot 3^{b^2-1+c} \cdot 3^{c^2-1+a}} = 3 \cdot 3^{\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c-3}{3}} = 3^{\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c}{3}}.$$

Atunci $a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c \leq 90$, prin urmare $a^2 + b^2 + c^2 \leq 105$.

Dar $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 75$, de unde $a^2 + b^2 + c^2 = 75$, cu egalitate pentru $a = b = c = 5$.

Soluția sistemului din enunț este $x = 12$, $y = 8$, $z = 6$.