**Clasa a X-a – Etapa 3 - Problema 4**

**Enunţ:** *Se consideră numerele complexe distincte* $a,b,c,d$. *Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

***(i)*** *Pentru orice* $z\in\mathbb{C}$ *are loc inegalitatea:* $|z-a|+|z-b|\geq|z-c|+|z-d|$;

***(ii)*** *Există* $\alpha\in(0,1)$ *astfel încât* $c=\alpha a+(1-\alpha)b$ *şi* $d=(1-\alpha)a+\alpha b$.

**Soluţie.**

**(ii)**$\Rightarrow$**(i)** Avem $|z-c|=|z-\alpha a-(1-\alpha)b|\leq\alpha|z-a|+(1-\alpha)|z-b|$. Analog deducem şi inegalitatea $|z-d|\leq(1-\alpha)|z-a|+\alpha|z-b|$ şi prin adunare deducem concluzia.

**(i)**$\Rightarrow$**(ii)** Pentru $z=a$ obţinem $|a-b|\geq|a-c|+|a-d|$. Apoi pentru $z=b$ obţinem $|b-a|\geq|b-c|+|b-d|$. Prin adunare obţinem $2|a-b|\geq|a-c|+|a-d|+|b-c|+|b-d|$.

Cum $|a-c|+|b-c|\geq|a-b|$ şi $|a-d|+|b-d|\geq|a-b|$, obţinem egalitatea $2|a-b|=|a-c|+|a-d|+|b-c|+|b-d|$ care este posibilă numai dacă $|a-c|+|b-c|=|a-b|$ şi $|a-d|+|b-d|=|a-b|$, de unde deducem că există $\alpha,\beta\in(0,1)$ astfel încât $c=\alpha a+(1-\alpha)b$ şi $d=\beta a+(1-\beta)b$. Problema este finalizată dacă arătăm că $\alpha+\beta=1$.

Avem $|a-c|+|b-c|=|a-b|\geq|a-c|+|a-d|$ de unde $|b-c|\geq|a-d|$ . Apoi $|a-d|+|b-d|=|b-a|\geq|b-c|+|b-d|$, de unde $|a-d|\geq|b-c|$ care conduce la egalitatea $|a-c|=|b-d|$. Ştiind că $c=\alpha a+(1-\alpha)b$ şi $d=\beta a+(1-\beta)b$, obţinem prin înlocuire