

Problema 1. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_{2024} \in (0, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_{2024}^x$. Știind că $f(2024) = f(-2024) = 2024$, calculați $f(2025)$.

Soluție. Din $f(2024) = 2024$ rezultă $\frac{a_1^{2024} + a_2^{2024} + \dots + a_{2024}^{2024}}{2024} = 1$,
iar din $f(-2024) = 2024$ rezultă $\frac{2024}{\frac{1}{a_1^{2024}} + \frac{1}{a_2^{2024}} + \dots + \frac{1}{a_{2024}^{2024}}} = 1$.

Ținând cont că media aritmetică a unor numere reale pozitive este egală cu media lor armonică dacă și numai dacă numerele sunt egale, deducem că $a_1^{2024} = a_2^{2024} = \dots = a_{2024}^{2024}$, de unde rezultă că $a_1 = a_2 = \dots = a_{2024} \stackrel{\text{not.}}{=} a$. Atunci $f(x) = 2024 \cdot a^x$, iar din $f(2024) = 2024$ rezultă $a^{2024} = 1$. Cum $a > 0$ deducem că $a = 1$, prin urmare $f(x) = 2024$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, $f(2025) = 2024$.