Problema 2. Dacă notăm cu $d(x)$ numărul divizorilor naturali ai unui număr natural x, demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, are loc egalitatea

$$d(n) \cdot d(6n) = d(2n) \cdot d(3n)$$

* * *

Soluţie:
Dacă $n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, cu $m \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m > 3$ numere prime, $a, b \in \mathbb{N}$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$, atunci avem:
$d(n) = (a+1)(b+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$,
$d(2n) = (a+2)(b+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$,
$d(3n) = (a+1)(b+2)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$ şi
$d(6n) = (a+2)(b+2)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$, deci
$d(n)\cdot d(6n) = (a+1)(b+1)(a+2)(b+2)[(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)]^2 = d(2n)\cdot d(3n)$.