Problemă. Fie triunghiul echilateral ABC.

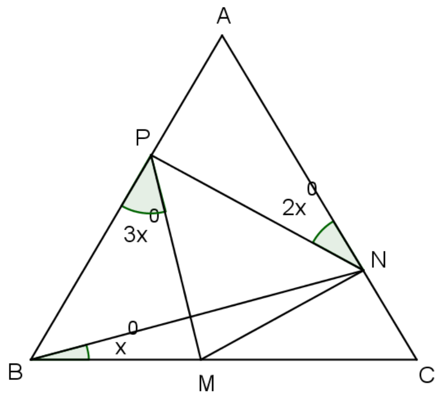
Pe laturile (BC), (CA), (AB) se consideră punctele M, N şi P, asfel încât: $m(\widehat{NBC}) = x^\circ$, $m(\widehat{ANP}) = 2x^\circ$, $m(\widehat{BPM}) = 3x^\circ$.

a) Arătaţi că triunghiul BPN este isoscel.

b) Dacă $x = 15^\circ$, demonstraţi că $MN \perp AC$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluţie



a) Unghiul BNA este exterior triunghiului BNC şi atunci

$$m(\widehat{BNA}) = 60^\circ + x^\circ.$$

Cum

$$m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{BNA}) - m(\widehat{PNA})$$

deducem că

$$m(\widehat{PNB}) = 60^\circ - x^\circ \qquad (1).$$

Pe de altă parte,

$$m(\widehat{PBN}) = m(\widehat{PBC}) - m(\widehat{NBC})$$

adică

$$m(\widehat{PBN}) = 60^\circ - x^\circ \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) deducem că triunghiul BNP este isoscel, cu $[PB] \equiv [PN]$.

b) Dacă $x = 15^\circ$ atunci $m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{PBN}) = 45^\circ$ şi $m(\widehat{BPM}) = 45^\circ$.

Din $m(\widehat{BPM}) = 45^\circ$ şi $m(\widehat{PBN}) = 45^\circ$ rezultă $PM \perp BN$ şi cum $m(\widehat{PNB}) = 45^\circ$ obţinem că $m(\widehat{NPM}) = 45^\circ$.

Acum, din $[PB] \equiv [PN]$; $[PM]$ latură comună şi $\widehat{BPM} \equiv \widehat{NPM}$ $(= 45^\circ)$ deducem că $\triangle PBM \equiv \triangle PNM$, de unde $m(\widehat{PNM}) = 60^\circ \quad (3)$.

Din (3), folosind faptul că $m(\widehat{PNA}) = 30^\circ$, obţinem că $m(\widehat{ANM}) = 90^\circ$, adică $MN \perp AC$.