Problema 3. Găsiți toate funcțiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care verifică egalitatea
$$f(m) - f(n) = (m-n)\big(g(m) + g(n)\big),$$
pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

***

Soluție.

Vom folosi următoarele notații: $f(0) = a$, $g(0) = b$ și $g(1) = c$. Atunci avem $f(m) - a = m\big(g(m) + b\big)$, de unde rezultă $f(m) = a + mg(m) + mb$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, (1) deci $f(m) - f(n) = mg(m) - ng(n) + mb - nb$. Înlocuind în relația din enunț, obținem $mg(m) - ng(n) + mb - nb = mg(m) + mg(n) - ng(m) - ng(n)$, de unde deducem că are loc egalitatea $mb - nb = mg(n) - ng(m)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$. Făcând aici $n = 1$, obținem $mb - b = mc - g(m)$, adică $g(m) = mc - mb + b$.

Din (1) obținem $f(m) = a + mb + m(mc - mb + b) = (c-b)m^2 + 2bm + a$, deci
$$f(x) = dx^2 + 2bx + a \quad \text{și} \quad g(x) = dx + b, \qquad (2)$$
pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$, unde $d = c - b$.

Avem $d \in \mathbb{N}$ deoarece, în caz contrar, are loc $c < b$, deci $b - c > 0$. Cum $g(x) \in \mathbb{N}$, rezultă că $(b-c)x \le b$, adică $x \le \dfrac{b}{b-c}$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$, absurd!

Se verifică ușor că funcțiile din (2) verifică condițiile din enunț.