Comentarii la a 17-a jBMO 2013, Antalya – Turcia
Balcaniada de Matematică pentru juniori

ABSTRACT. Comments on the problems of the 17^{th} jBMO (the junior Balkan Mathematical Olympiad), Antalya – Turkey, June 21-26, 2013.

Data: 26 iunie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a 17-a jBMO (Balcaniada de Matematică pentru juniori), Antalya – Turcia, 21-26 iunie 2013, este, după convenţia general acceptată, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. jBMO (23.06.2013 – patru probleme)

Subiectul (1). *Determinaţi toate perechile ordonate de numere naturale nenule* $(a;,b)$ *pentru care numerele* $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ *şi* $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ *sunt simultan numere naturale nenule.*

SERBIA

Soluţie. În modul cel mai direct, şi evident cel indicat pentru a simplifica expresiile divizate, avem

$$a^3b-1=(a+1)b(a^2-a+1)-(b+1),$$
$$b^3a+1=(b-1)a(b^2+b+1)+(a+1),$$

de unde rezultă că avem nevoie de $a+1 \mid b+1$ şi $b-1 \mid a+1$. Prin urmare $b-1 \mid b+1$, deci $b-1 \mid (b+1)-(b-1)=2$, posibil doar pentru $b=2$, de unde $a=2$, sau pentru $b=3$, de unde $a=1$ sau $a=3$. Aşadar toate soluţiile naturale nenule sunt date de $\boxed{(a,b)\in\{(2,2),(1,3),(3,3)\}}$. $\square$

Remarcă. O problemă absolut banală; e adevărat că trebuie să apară în concurs şi probleme uşoare, dar aceasta, pe lângă completa trivialitate, nu spune nici mai nimica. Nici ca subiect de extemporal nu e potrivită (zic).

Subiectul (2). *Fie* ABC *un triunghi ascuţitunghic cu* $AB<AC$ *şi fie* O *centrul cercului său circumscris* ω. *Fie* D *un punct pe segmentul* $[(BC)]$ *astfel încât* $\widehat{BAD}\equiv\widehat{CAO}$. *Fie* E *al doilea punct de intersecţie a cercului* ω *cu dreapta* AD. *Dacă* M, N *şi* P *sunt mijloacele segmentelor* $[BE]$, $[OD]$ *şi respectiv* $[AC]$, *demonstraţi că punctele* M, N *şi* P *sunt coliniare.*

MACEDONIA

[1] Subiecte, soluţii oficiale şi rezultate complete la `http://jbmo2013.tubitak.gov.tr/`

Soluţie. Problema se reduce la o configuraţie clasică, dacă se observă că *ortocentrul* H al triunghiului ABC se află pe AD (adică AD este înălţimea din A). Într-adevăr, nu este necesară preştiinţa faptului că înălţimea din A şi dreapta OA sunt *izogonale* relativ la unghiul A; aceasta rezultă imediat din faptul că unghiurile făcute cu AB, respectiv AC, sunt complementare cu unghiul B.

Acum, ştim că $DH = DE$, deci MD este linie mijlocie în triunghiul EBH, aşadar paralelă şi egală cu jumătate din BH. Pe de altă parte, considerând punctul A' *diametral opus* pe ω faţă de A, OP este linie mijlocie în triunghiul ACA', aşadar paralelă şi egală cu jumătate din CA'. Dar $CA' = BE = BH$, şi, în plus, CA' este paralelă cu BH, căci $\angle BCA' = \angle CBE = \angle CBH$.

Prin urmare, MD şi OP sunt paralele şi egale, deci patrulaterul $MDPO$ este paralelogram. Cum punctul N este mijlocul diagonalei OD, el va fi şi mijlocul diagonalei MP, deci coliniar cu punctele M şi P. □

Soluţie Analitică. Mi s-a părut şi caraghios, şi instructiv, să prezint şi soluţia ce urmează (valabilă în cazuri cronice de lipsă de inspiraţie). Ea va avea şi alte consecinţe, asupra relevanţei condiţiilor din enunţ, după cum se va vedea mai jos.

Alegem sistemul de coordonate xOy astfel încât să avem

$$O(0,0), A(a,u), B(-b,v), C(b,v), A'(-a,-u).$$

Din faptul că $\angle BAD = \angle CAO$, adică $\angle BAE = \angle CAA'$, rezultă $E(a,-u)$ (adică $AD \perp BC$), deci $D(a,v)$. Dar atunci $M\left(\frac{a-b}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2}, \frac{v}{2}\right)$, $P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$. Panta dreptei MN este $\dfrac{\frac{v}{2} - \frac{v-u}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{a-b}{2}} = \frac{u}{b}$, iar panta dreptei NP este $\dfrac{\frac{u+v}{2} - \frac{v}{2}}{\frac{a+b}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{u}{b}$; cum se vede că ele coincid, coliniaritatea este demonstrată.

Se observă acum uşor ceea ce bănuiam încă de la început, anume că $AB < AC$ este o condiţie inutilă (nici măcar cazul isoscel nu produce vreo poziţie degenerată). Nici cerinţa $\triangle ABC$ ascuţitunghic nu este necesară (este adevărat, apar câteva cazuri degenerate, dar acestea nu fac altceva decât să sporească bogăţia de configuraţii; de asemenea, punctul D va putea deveni exterior laturii BC). Este ciudată alegerea juriului de a accepta aceste condiţii irelevante; doar pentru a evita complicaţiile !?! □

Remarcă. Reducerea la o configuraţie cunoscută, dar foarte importantă în geometria triunghiului, nu este chiar rea. Iată o problemă uşoară, dar mai elegantă (în comparaţie cu Subiectul 1). Cum geometria sintetică este încă o componentă principală în educaţia matematică a juniorilor, orice astfel de problemă este chiar binevenită (mai puţin observaţia critică de mai sus).

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că* $\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$,, *pentru oricare numere reale pozitive a şi b cu proprietatea $ab \geq 1$.*

Serbia

Soluţie. O, *sancta simplicitas!* Primul pas luat este eliminarea termenilor "inconvenienţi". Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{2}{a+1} + \dfrac{a+1}{2} \geq 2$. Aşadar $a + 2b + \dfrac{2}{a+1} \geq \dfrac{a+4b+3}{2}$, şi în mod similar $b + 2a + \dfrac{2}{b+1} \geq \dfrac{b+4a+3}{2}$.

Dar printr-o banală dezvoltare

$$(a+4b+3)(b+4a+3) = (a+b)^2 + 3(a+b)(a+b+2) + 9(ab+a+b+1),$$

şi cum $ab \geq 1$, de unde şi $a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2$, rezultă

$$(a+4b+3)(b+4a+3) \geq 2^2 + 3 \cdot 2(2+2) + 9(1+2+1) = 64,$$

exact ceea ce era trebuincios.

Egalitate se obţine (în mod evident) dacă şi numai dacă $a = b = 1$. $\square$

Remarcă. Nu sunt oricum mare amator de inegalităţi; şi aceasta nu face excepţie – formă urâtă, restricţie ciudată, lipsită de miez şi consecinţă; un exerciţiu (futil) de aplicare de tehnici dobândite. O multitudine de alte metode (aproape oricare) pot conduce la succes, dar soluţia de mai sus capturează, cred eu, cel mai bine trivialitatea rezultatului cerut.

Subiectul (4)**.** *Fie n un număr natural nenul. Doi jucători, Alina şi Bulă,*[2] *joacă următorul joc:*

- *Alina alege n numere reale, nu neapărat distincte.*
- *Alina scrie pe o foaie de hârtie toate sumele obţinute adunând câte două dintre cele n numere şi-i şi îi înmânează foaia lui Bulă (există $\dfrac{n(n-1)}{2}$ astfel de sume, nu neapărat distincte).*
- *Bulă câştigă dacă determină corect, dintr-o singură încercare, toate cele n numere alese iniţial de Alina.*

Poate fi Bulă sigur că va câştiga în următoarele cazuri?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$.

Justificaţi răspunsurile.
[De exemplu, când $n = 4$, Alina poate alege numerele $1, 5, 7$ şi 9, care au aceleaşi sume pe în perechi ca şi numerele $2, 4, 6$ şi 10;, prin urmare, Bulă nu poate fi sigur că va câştiga jocul.]

BULGARIA

Soluţie. O celebrată teoremă a d-lor J. L. SELFRIDGE şi E. G. STRAUS (sugerată de o întrebare a lui L. MOSER) afirmă

Teoremă. Fiind date două liste diferite de numere întregi pozitive (nu neapărat distincte ca valori), $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, atunci familia celor $\dfrac{n(n-1)}{2}$ valori (nu neapărat distincte, fiecare apărând cu multiplicitatea sa) ale sumelor $a_i + a_j$, şi familia corespunzătoare de valori ale sumelor $b_i + b_j$, cu $1 \leq i < j \leq n$, pot coincide numai dacă n este o putere a lui 2.

[2] Mi-am luat libertatea de a schimba numele din versiunea în limba română al băiatului (Bogdan), cu un apelativ mai neaoş ... ☺

Demonstraţie. O bijuterie (a autorilor) de aplicare de metode algebrice într-o problemă combinatorică. Formăm expresiile polinomiale (folosite în ce urmează într-un fel ca funcţii generatoare exponenţiale pentru sumele de valori) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{a_k}$ şi $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{b_k}$, şi calculăm

$$f(x)^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} x^{a_i+a_j} = \sum_{k=1}^{n} x^{2a_k} + 2 \sum_{1 \le i<j \le n} x^{a_i+a_j} = f(x^2) + 2 \sum_{1 \le i<j \le n} x^{a_i+a_j},$$

$$g(x)^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} x^{b_i+b_j} = \sum_{k=1}^{n} x^{2b_k} + 2 \sum_{1 \le i<j \le n} x^{b_i+b_j} = g(x^2) + 2 \sum_{1 \le i<j \le n} x^{b_i+b_j}.$$

Dar din ipoteză avem $\sum_{1 \le i<j \le n} x^{a_i+a_j} = \sum_{1 \le i<j \le n} x^{b_i+b_j}$, deci

$$f(x)^2 - g(x)^2 = f(x^2) - g(x^2).$$

Desigur, $f(1) = g(1) = n$, deci $x - 1 \mid f(x) - g(x)$, iar $f(1) + g(1) = 2n$. Fie atunci $f(x) - g(x) = (x - 1)^m h(x)$, unde $m \ge 1$ şi $x - 1 \nmid h(x)$. Vom avea

$$(x^2-1)^m h(x^2) = f(x^2) - g(x^2) = (f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) = (f(x)+g(x))(x-1)^m h(x),$$

de unde $(x + 1)^m h(x^2) = (f(x) + g(x))h(x)$. Pentru $x = 1$ obţinem atunci $2^m h(1) = 2nh(1)$, şi deci $n = 2^{m-1}$ (putem simplifica, deoarece $x - 1 \nmid h(x)$ forţează $h(1) \neq 0$). ■

Ceea ce urmează se doreşte o argumentare completă pentru forţa deplină a teoremei, cu liste de numere reale. Nu vă speriaţi, este ca un paragraf cu asterisc, rezervat celor mai asidui cititori, şi de aceea a şi fost trimis într-o notă de subsol.[3]

a. b. Drept consecinţă a teoremei de mai sus, sumele perechilor de numere determină în mod unic acele numere, căci $n = 5, 6$ nu este putere a lui 2. Desigur, coordonatorii nu se aşteaptă la această argumentare – sunt curios însă de a şti câte puncte ar fi obţinut ... Nu mă interesează neapărat soluţia ”copilărească”, oricât de ingenioasă ar fi, avută în vedere în barem. Să zicem, pentru punctul **a.**, că numerele alese ar fi $a \le b \le c \le d \le e$. Atunci sumele se pot parţial ordona $a + b \le a + c \le a + d \le a + e \le b + e \le c + e \le d + e$, cu cele trei rămase, $b + c \le b + d \le c + d$, undeva pe la mijloc. O diagramă HASSE poate fi utilă în vizualizarea acestei relaţii de ordine (parţială).

[3] *Voi extinde teorema la sisteme de numere reale. Pentru început, este clar că dacă perechea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ satisface, la fel satisface şi $(h\mathcal{A} + t, h\mathcal{B} + t)$, cu $h \neq 0$ (putem aplica translaţii şi omotetii). Această observaţie banală extinde imediat teorema la $\mathbb{Z}$ (putem lua $t > -\min(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, $h = 1$), şi apoi la $\mathbb{Q}$ (putem lua $h \neq 0$ astfel încât $h(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subset \mathbb{Z}$). Pentru a merge mai departe, fie T subspaţiul vectorial al lui $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ generat de numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, şi care este evident de dimensiune finită (cel mult $2n$). Alegem o bază B a lui, şi atunci numerele noastre se scriu în mod unic drept $a_i = \sum_{b \in B} \lambda_{i,b} b$, respectiv $b_j = \sum_{b \in B} \mu_{j,b} b$, pentru toţi $1 \le i, j \le n$, cu coeficienţii $\lambda_{i,b}$ şi $\mu_{j,b}$ raţionali. Dar atunci coincidenţa între sumele de perechi $a_i + a_j$ şi $b_i + b_j$ se traduce în acelaşi lucru, pentru perechile de liste $\mathcal{A}_b = (\lambda_{1,b}, \lambda_{2,b}, \ldots, \lambda_{n,b})$ şi $\mathcal{B}_b = (\mu_{1,b}, \mu_{2.b}, \ldots, \mu_{n,b})$, pentru fiecare $b \in B$, şi problema a fost redusă de la numere reale la numere raţionale. Există şi alte metode, mai elementare, folosind din plin invarianţa proprietăţii la translaţii şi omotetii. Este de menţionat că rezultatele de mai sus sunt înrudite şi cu reprezentările, şi sumele de puteri din teorema TARRY-ESCOT-PROUHET.

Suma tuturor numerelor este cunoscută, fiind de 4 ori mai mică decât suma tuturor perechilor; apoi se compară valorile cunoscute, şi se pot scade în mod corespunzător. Metoda este desigur chiar ceva mai complicată la punctul **b.**, şi evident, nu poate fi generalizată pentru numere mari, cum ar fi $n = 2013$, ha, ha (de altfel, chiar $n = 7$ a fost în mod subtil evitat).

Mai tristă este însă lipsa oricărui comentariu, despre tocmai acest caz general; dacă tot facem concursuri, ar fi bine să şi educăm puţin, dacă nu chiar să **ne** educăm puţin ... Ar fi fost poate de dorit să se fi făcut şi cerinţa de a obţine (în mod controlat) un model general, decât doar unul pentru valoarea particulară 8, care poate fi, în oareşicare măsură, chiar ghicit (prin încercări).

c. Exemplul dat în enunţ pentru a înţelege mai bine problema poate fi folosit cu succes pentru a exhiba un astfel de model pentru $n = 8 = 2^3$. În general, dacă avem un astfel de model $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ pentru n (desigur, o putere a lui 2), atunci putem crea un model $\mathcal{A}_{2n}$, $\mathcal{B}_{2n}$ în felul următor – alegând o translaţie $t \neq 0$ oarecare (să zicem, suficient de mare pentru a nu crea duplicate, deşi această restricţie nu este absolut necesară)

$$\mathcal{A}_{2n} = \mathcal{A}_n \cup (t + \mathcal{B}_n), \ \mathcal{B}_{2n} = \mathcal{B}_n \cup (t + \mathcal{A}_n).$$

Sumelor $a_i + a_j$ corespund sumele $b_i + b_j$; sumelor $(t+b_i)+(t+b_j)$ corespund sumele $(t+a_i)+(t+a_j)$; iar sumelor $a_i+(t+b_j)$ corespund sumele $b_j+(t+a_i)$.

Modelul $\mathcal{A}_4 = (1, 5, 7, 9)$ şi $\mathcal{B}_4 = (2, 4, 6, 10)$, prezentat în enunţ pentru $n = 4$ este chiar el de fapt obţinut din $\mathcal{A}_2 = (1, 5)$ şi $\mathcal{B}_2 = (2, 4)$, pentru $t = 5$. Putem obţine $\mathcal{A}_8 = (1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20)$ şi $\mathcal{B}_8 = (2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19)$, pentru $t = 10$. Mai elegante sunt modelele

$$\mathcal{A}_2 = (1, 4), \ \mathcal{B}_2 = (2, 3);$$

$$\mathcal{A}_4 = (1, 4, 6, 7), \ \mathcal{B}_4 = (2, 3, 5, 8), \text{ pentru } t = 4;$$

$$\mathcal{A}_8 = (1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16), \ \mathcal{B}_8 = (2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15), \text{ pentru } t = 8.$$

Şi evident, putem continua inductiv construirea de astfel de modele, pe aceeaşi linie de gândire, pentru orice putere a lui 2. □

Remarcă. Am cam spus tot ce trebuia pe parcursul soluţiei; problema a avut un impact major asupra clasamentului final. Să amintesc totuşi că pe AoPS acest subiect este tratat copios, într-o multitudine de postări, unele foarte timpurii. Merită trecute în revistă.

3. Încheiere

Ca de obicei, site-ul oficial, deşi extrem de elegant construit, cu navigare uşoară, şi conţinut logistic complet, îşi face un mare deserviciu prin faptul că nu urcă subiectele, odată ce concursul a fost încheiat. Este 23 iunie, ora 21:30, şi nimic nu apare; ar fi trebuit deja să fie nu numai subiectele, dar şi soluţiile oficiale.[4] Noroc cu comunitatea de useri de pe AoPS (mathlinks)! unde problemele au apărut **imediat** ce au fost disponibile, şi au început să "curgă" şi soluţii ... Din fericire, participanţii au acces la soluţiile pe care liderii de echipă le-au primit după ce subiectele au fost alese, şi le pot consulta în voie. Să sperăm că rezultatele vor fi *timely*. **Şi au fost!**

[4] În fine, la ora 23:30 au apărut enunţurile (în toate limbile ţărilor participante), şi soluţiile oficiale. Rezultatele au apărut cu repeziciune, pe 24 iunie, ora 22:00. Bravo!

Este ciudat, şi neplăcut cum, cu trecerea anilor, dificultatea şi valoarea acestei competiţii scade; un paternalism de care ne putem lipsi. Problemele propuse de România sunt din ce în ce mai rare, dacă nu într-o completă dispariţie (mi-aduc aminte cu plăcere de cele propuse de inegalabilul Bebe Panaitopol). Iar când, întâmplător, câte una dintre probleme se pretează la o explorare mai aprofundată, vezi problemele 4 – jBMO 2008 şi 2013, sau problema 3 – jBMO 2012, soluţiile oficiale nu fac niciun efort pentru a deschide acest drum.

Au participat cele 11 ţări membre, precum şi 8 ţări invitate (printre care, pentru prima dată, Franţa şi Statele Unite), plus echipa (Turcia-B) a ţării gazdă. Rezultatele echipei noastre la jBMO 2013, Turcia, sunt (felicitări !!!)

Mircea FIANU		Bucureşti		Leader
Marius PERIANU		Slatina		Deputy
Andrei ECKSTEIN		Timişoara		Observer
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	**Medalie**
Ioan-Laurenţiu PLOSCARU	IX	C.N. A. Lahovari, Rm. Vâlcea	**39**	**Aur**
Teodor-Andrei ANDRONACHE	IX	ICHB, Bucureşti	34	**Aur**
Andrei PAŞA	VIII	Colegiul Naţional, Iaşi	32	Argint
Ciprian-Mircea BONCIOCAT	VII	C.N. T. Vianu, Bucureşti	32	Argint
Cristian TELEANU	IX	Lic. Teoretic Ovidius, Constanţa	30	Argint
Filip-Alexandru ION	VIII	Şcoala 56, Bucureşti	32	Argint
Echipa României			**199/240**	**1/11 + 9**

Câteva comentarii finale. **Laurenţiu Ploscaru** a obţinut cel mai mare scor din concurs (la egalitate cu un localnic) – la mai mare! Toţi cei şase concurenţi români au luat punctaj maxim pe primele trei probleme (ceea ce arată pregnant gradul lor relativ scăzut de dificultate). Prin urmare, tot concursul, pentru toată lumea, ”a stat” în problema 4 (un singur scor maxim de 10, şi două de 9; Franţa a făcut foarte bine aici).

S-au acordat 18 medalii de Aur (39 – 33 puncte, 16%), 27 medalii de Argint (32 – 26 puncte, 24%), 34 medalii de Bronz (25 – 14 puncte, 30%), şi 7 menţiuni onorabile, relativ la un total de 114 participanţi.

România a ieşit pe primul loc în clasamentul (neoficial) pe naţiuni, la doar 2! puncte de Turcia, urmată îndeaproape de (Turcia-B), apoi la distanţă (SUA), Serbia şi Bulgaria. De apreciat *fair-play*-ul ţării gazdă.

Reamintesc, toate subiectele, soluţiile oficiale şi rezultatele complete pot fi consultate acum la `http://jbmo2013.tubitak.gov.tr/`