Problema 2. Determinați numerele complexe x, y, z, știind că

$$\begin{cases} x^3-(y+z)x^2+xyz=3\mathrm{i} \\ y^3-(z+x)y^2+xyz=3\mathrm{i} \\ z^3-(x+y)z^2+xyz=3\mathrm{i} \end{cases}.$$

Dan Popescu, Suceava

Soluție:

Scăzând primele două ecuații din sistem, deducem că $x=y$ sau $x^2+y^2-xz-yz=0$. Cum $x=y$ conduce la contradicția $3\mathrm{i}=0$, vom analiza în continuare relația $x^2+y^2=xz+yz$, împreună cu celelalte două relații analoage. Adunând aceste trei relații, obținem că $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$, adică x, y, z sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral nedegenerat. Dacă $\varepsilon \neq 1$ este o rădăcină de ordinul trei a unității, atunci $\begin{cases} y=\varepsilon x \\ z=\varepsilon^2 x \end{cases}$ sau $\begin{cases} y=\varepsilon^2 x \\ z=\varepsilon x \end{cases}$.

În ambele situații, prima ecuație din sistem este echivalentă cu ecuația $x^3-(\varepsilon+\varepsilon^2)x^3+\varepsilon^3x^3=3\mathrm{i}$. Cum $\varepsilon^3=1$ și $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, rezultă $x^3=\mathrm{i}$ sau $x^3=(-\mathrm{i})^3$. Obținem $x \in \{-\mathrm{i}, -\mathrm{i}\varepsilon, -\mathrm{i}\varepsilon^2\}$.

Deoarece $w^3=\mathrm{i}$, pentru orice $w \in \{-\mathrm{i}, -\mathrm{i}\varepsilon, -\mathrm{i}\varepsilon^2\}$, iar mulțimea $\{-\mathrm{i}, -\mathrm{i}\varepsilon, -\mathrm{i}\varepsilon^2\}$ are suma elementelor egală cu 0 și produsul elementelor egal cu i, rezultă că soluțiile sistemului inițial sunt cele șase triplete ordonate $\{x, y, z\}$, obținute prin permutarea elementelor mulțimii $\{-\mathrm{i}, -\mathrm{i}\varepsilon, -\mathrm{i}\varepsilon^2\}$.