Problemă. Determinaţi cel mai mare număr n, de trei cifre, astfel încât suma cifrelor numărului n, respectiv suma cifrelor numărului $n+1$, să se dividă cu 4.

Concursul interjudeţean de matematică "Petre Sergescu",
Drobeta Turnu-Severin, 2007

Soluţie: Fie $n = \overline{abc}$. Notăm $S(n)$ suma cifrelor lui n şi $S(n+1)$ suma cifrelor lui $n+1$.

Avem $S(n) = a + b + c$.

Dacă $c \neq 9$, atunci $S(n+1) = a + b + c + 1$.

Vom arăta că această situaţie este imposibilă.

Deoarece

$$4 \text{ divide } S(n)$$

şi

$$4 \text{ divide } S(n+1),$$

rezultă

$$4 \text{ divide } S(n+1) - S(n),$$

adică

$$4 \text{ divide } 1,$$

ceea ce este fals.

De aici deducem că $c = 9$.

Deoarece n trebuie să fie cel mai mare număr de trei cifre vom lua $a = 9$.

Cu acestea $n = \overline{9b9}$ şi $n+1 = \overline{9(b+1)0}$ şi $S(n) = 18+b$, iar $S(n+1) = 10 + b$.

Singura variantă pentru care $S(n)$ şi $S(n+1)$ sunt divizibile cu 4 este $b = 6$.

Numărul căutat este 969.