Problema 2. Arătaţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\geq\frac{9}{8(a+b+c)}.$$

* * *

Soluţia 1:
Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz în forma prezentată în materialul teoretic, obţinem

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}=\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{b+c}+\frac{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}{c+a}+\frac{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b}\geq$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b+b+c+c+a}=\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)}.$$

Din inegalitatea lui Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\quad\forall\, a,b,c>0$$

rezultă atunci imediat inegalitatea dorită.
Inegalitatea lui Nesbitt se demonstrează cu inegalitatea din materialul teoretic, folosind „trucul" (prezentat la problema rezolvată nr. 3 din material) de a amplifica fiecare fracţie cu numărătorul ei (pentru a face să apară pătrate la numărători).
Deorece în inegalitatea lui Nesbitt avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$, iar pentru $a=b=c$ avem egalitate şi în inegalitatea din enunţ, rezultă că inegalitatea din enunţ este satisfăcută cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Soluţia 2: Putem aplica inegalitatea lui *Hölder* în următoarea variantă:
dacă $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3>0$, atunci

$$(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)(a_3+b_3+c_3)\geq\left(\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3}+\sqrt[3]{c_1c_2c_3}\right)^3.$$

Astfel, $(1+1+1)(a+b+c)\left(\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\right)\geq$

$$\left(\sqrt[3]{1\cdot a\cdot\frac{a^2}{(b+c)^3}}+\sqrt[3]{1\cdot b\cdot\frac{b^2}{(c+a)^3}}+\sqrt[3]{1\cdot c\cdot\frac{c^2}{(a+b)^3}}\right)^3=$$

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3\geq\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

conform inegalităţii lui Nesbitt (vezi soluţia 1).
Împărţind cu $3(a+b+c)$ obţinem inegalitatea din enunţ.