Joi, 12 aprilie 2012

Problema 1. Fie ABC un triunghi având punctul O ca centru al cercului său circumscris. Punctele D, E şi F se află respectiv pe laturile BC, CA şi AB, astfel încât dreapta DE este perpendiculară pe CO iar dreapta DF este perpendiculară pe BO. *(De exemplu, punctul D se află pe dreapta BC, fiind situat între B şi C pe acea dreaptă.)*

Fie K centrul cercului circumscris triunghiului AFE. Demonstraţi că dreptele DK şi BC sunt perpendiculare.

(Olanda) Merlijn Staps

Problema 2. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Determinaţi cel mai mare număr întreg m cu proprietatea că un tablou cu m linii şi n coloane poate fi umplut cu numere reale în aşa fel încât pentru oricare două linii diferite $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ şi $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ următoarea relaţie este adevărată

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

(Polonia) Tomasz Kobos

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x)\,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

(Olanda) Birgit van Dalen

Problema 4. O mulţime A de numere întregi se zice *sumă-plină* dacă $A \subseteq A + A$, adică orice element $a \in A$ este suma unei perechi (nu neapărat unice) de elemente (nu neapărat distincte) $b, c \in A$. O mulţime A de numere întregi se zice *liberă-de-sume-zero* dacă 0 este singurul număr întreg care nu poate fi exprimat ca suma elementelor unei submulţimi finite nevide a lui A.

Există oare o mulţime sumă-plină liberă-de-sume-zero de numere întregi?

(România) Dan Schwarz

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte