

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 20. Celor 19 elevi din clasă li se propune următorul joc: primul elev șterge două numere și pune în locul lor suma acestora mărită cu 1; al doilea elev șterge două numere și pune în locul lor suma acestora mărită cu 2; al treilea elev șterge două numere și pune în locul lor suma acestora mărită cu 3 și așa mai departe până la ultimul elev. Ce număr rămâne pe tablă la terminarea jocului? (Fiecare elev joacă o singură dată.)

Mirela Marin, Iași

Soluție. Notăm cu S_0 suma celor 20 de numere aflate la început pe tablă, apoi cu S_p suma numerelor aflate pe tablă la pasul p . Observăm că la fiecare pas suma S_p este suma anterioară mărită cu p , adică $S_p = S_{p-1} + p$. Pe de altă parte, la fiecare pas dispăre un număr de pe tablă, așadar după 19 pași, pe tablă rămâne un singur număr egal cu S_{19} . Avem $S_0 = 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = 210$; $S_1 = S_0 + 1$; $S_2 = S_1 + 2 = S_0 + 1 + 2$; $S_3 = S_2 + 3 = S_0 + 1 + 2 + 3$ și așa mai departe, $S_{19} = S_0 + 1 + 2 + \dots + 19 = 400$. În concluzie, pe tablă rămâne scris numărul 400.