Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c, d care satisfac simultan relaţiile $a^2 = b^3$, $c^4 = d^5$ şi $b - d = 19$.

* * *

Soluţie. Examinând descompunerile în factori primi ale numerelor a^2, b^3, c^4, d^5 şi ţinând cont de faptul că 2 şi 3, respectiv 4 şi 5 sunt numere prime între ele, deducem că orice factor prim apare în descompunerea în factori primi a lui $a^2 = b^3$ la o putere multiplu de 6 şi orice factor prim apare în descompunerea în factori a lui $c^4 = d^5$ la o putere multiplu de 20. Rezultă de aici că există $n, m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a = n^3$, $b = n^2$, $c = m^5$, $d = m^4$. Deducem că $19 = b - d = n^2 - m^4 = (n - m^2)(n + m^2)$. Cum 19 şi $n + m^2$ sunt pozitive, trebuie ca $n - m^2 > 0$. Cum, în plus, $n - m^2 < n + m^2$, iar 19 este număr prim, rezultă că $n - m^2 = 1$ şi $n + m^2 = 19$. Obţinem de aici că $n = 10$ şi $m^2 = 9$, deci $m = 3$. Prin urmare $a = 1000$, $b = 100$, $c = 243$, $d = 81$, numere care satisfac relaţiile din enunţ.