

Clasa a X-a - Etapa I - Problema 1

Enunț. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de gradul doi.

a) Demonstrați că există o unică funcție de gradul unu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, avem $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(a+b)$;

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cu $a < b < c < d$. Dacă $\frac{f(d)-f(a)}{d-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$, atunci $b - a = d - c$.

Soluție. a) Dacă $f(x) = Ax^3 + Bx + C$, se demonstrează că $g(x) = Ax + B$.

b) Din $\frac{f(d)-f(a)}{d-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ avem $g(a+d) = g(b+c)$ și apoi concluzia. \square