SOLUŢIE

Problema 4

În fiecare din cele n^2 celule ale unui tablou $n \times n$, unde $n \geqslant 2$, se scrie zero. Apoi, pentru fiecare pereche de două linii distincte şi fiecare pereche de două coloane distincte, dacă acestea determină un pătrat, se adaugă fiecărui număr scris în colţurile acestuia dimensiunea laturii sale.

Arătaţi că, la final, putem alege n numere din tablou, oricare două situate pe rânduri şi coloane diferite, a căror sumă să fie cel mult egală cu $\dfrac{n^3-n}{3}$.

Cristi Săvescu

Soluţie.

În primul rând, ne dorim să calculăm suma totală s a numerelor din tablou la final. Presupunem că tabloul este aşezat cu vârful din stânga jos în originea axelor, şi două dintre laturile lui sunt pe axe. Observăm că pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, numărul de moduri în care putem alege un pătrat de latură k interior tabloului, cu laturile paralele la axe şi cu vârfurile în centre de celule ale tabloului iniţial, este egal cu numărul de moduri în care îi putem alege vârful din stânga jos. Acesta poate fi ales în oricare dintre celulele de coordonate (i, j) cu $1 \leq i, j \leq n-k$, deci în $(n-k)^2$ moduri. Atunci, pentru pătratele de latură k, suma totală a numerelor din tablou va creşte cu $4k \cdot (n-k)^2$. De aici, deducem că $s = \sum\limits_{k=1}^{n-1} 4k \cdot (n-k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} 4(n-k) \cdot k^2$. Prelucrând, obţinem $s = 4\left(n\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^3\right) = 4\left(\dfrac{n^2(n-1)(2n-1)}{6} - \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}\right) = \dfrac{n^2(n^2-1)}{3}$.

Acum, numărul de moduri de a alege n celule, oricare două situate pe rânduri şi coloane diferite este $n!$. Dacă considerăm s_i suma numerelor celulelor unei astfel de alegeri, în suma tuturor s_i (luate pentru toate permutările posibile), fiecare celulă apare de $(n-1)!$ ori (fixăm o celulă şi le alegem pe celelalte în tabloul rămas după eliminarea rândului şi coloanei ei). Atunci suma tuturor acestor sume s_i este $s \cdot (n-1)!$. Dintre acestea, cea mai mare este cel puţin egală cu media lor, $\dfrac{s \cdot (n-1)!}{n!} = \dfrac{s}{n}$ iar cea mai mică este cel mult egală cu media lor.