Problema nr 1. Să se determine funcţiile $f : N^* \to R$ *cu proprietatea :*

$$f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+...+n\cdot f(n)=f(n+1)-1, \forall n\in N^*.$$

Manuela Prajea.

Soluţie.

Pentru n=1 relaţia devine $f(2)=1+f(1)$.

Pentru n=2 relaţia devine $f(1)+2f(2)=f(3)-1 \Leftrightarrow f(3)=3(1+f(1))$.

Pentru n=3 relaţia dată conduce la $f(4)=12\cdot(1+f(1))$.

Prin inducţie vom demonstra că $f(n)=\frac{n!}{2}(1+f(1))$, pentru orice n ≥ 2 .(unde n!= $1\cdot 2\cdot ...\cdot n$)

Evident P(2) este adevarată.

Presupunem că P(k) : $f(k)=\frac{k!}{2}(1+f(1))$, este adevarată şi demonstrăm că

P(k+1): $f(k+1)=\frac{(k+1)!}{2}(1+f(1))$, este tot adevarată.

Pentru aceasta , din enunţ ştim că $f(k+1)=1+f(1)+2f(2)+3f(3)+...+k\cdot f(k)$, deci putem scrie $f(k+1)=(1+f(1))+\sum_{i=2}^{k} i\cdot f(i)=(1+f(1))+\sum_{i=2}^{k}\frac{i\cdot i!}{2}(1+f(1))=$ $(1+f(1))\left(1+\sum_{i=2}^{k}\frac{(i+1)!-i!}{2}\right)=\frac{(k+1)!}{2}(1+f(1))$, exact ce trebuia dovedit.(Am utilizat relaţia $i\cdot i!=(i+1)!-i!$).

Notând f(1)= a , unde a este număr real, rezultă că funcţiile căutate sunt :

$$f : N^* \to R, f(n)=\begin{cases} a, & n=1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n\geq 2 \end{cases}.$$