Etapa 7, Problema 4

Notăm cu $\mathscr{F}$ mulțimea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x)+y)=f(x)+f(y), \text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Determinați funcțiile injective din $\mathscr{F}$.

b) Arătați că $\mathscr{F}$ conține funcții neconstante care nu sunt nici injective, nici surjective.

Dorel Miheț

Soluție.

a) Relația din ipoteză conduce la

$$f(f(x)+y)=f(x)+f(y), \text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R} \text{ și}$$

$$f(f(y)+x)=f(y)+f(x), \text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Obținem imediat că

$$f(f(x)+y)=f(f(y)+x), \text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x)+y=f(y)+x \Leftrightarrow f(x)-x=f(y)-y, \text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(t)-t$. Funcția g verifică relația $g(x)=g(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$. Există atunci $a\in\mathbb{R}$ pentru care $g(x)=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt cele definite prin

$$f(x)=x+a.$$

b) De exemplu, funcția $f(x)=[x]$ aparține lui $\mathscr{F}$ și nu este nici injectivă, nici surjectivă.