**Problema 2.** Arătaţi că $[x] + [nx] = [(n + 1)x]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

*Andrei Eckstein*

**Soluţie:**
Dacă $x$ este număr întreg, atunci, pentru orice număr natural $n$, avem în mod evident $[(n + 1)x] = (n + 1)x = x + nx = [x] + [nx]$.
Reciproc, să presupunem că numărul $x$ are proprietatea că $[x] + [nx] = [(n + 1)x]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Dacă notăm cu $N = [x]$ şi cu $y = \{x\}$, atunci condiţia precedentă revine la $[N + y] + [n(N + y)] = [(n + 1)(N + y)]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, adică, folosind că $[k + x] = k + [x]$ pentru orice $k$ întreg, obţinem că $N + [y] + nN + [ny] = (n + 1)N + [(n + 1)y]$, adică $[ny] = [(n + 1)y]$ pentru orice $n$ natural. (Am folosit că $y = \{x\} \in [0, 1)$ implică $[y] = 0$.) Scriind egalitatea precedentă pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, obţinem $0 = [y] = [2y] = [3y] = \ldots = [my]$ pentru orice $m$ natural, adică $my < 1$ pentru orice $m$ natural. Dacă $y \neq 0$, de aici ar rezulta că toate numerele naturale sunt mai mici decât $\dfrac{1}{y}$, ceea ce este absurd.
Rămâne că $y = 0$, adică $x$ este număr întreg.