Problema 3. Fie $\Delta ABC(\widehat{A} = 90^\circ)$ şi $AD \perp BC$ ($\{D\} \in [BC]$) astfel încât $[BD] = \dfrac{[DC]}{2}$.

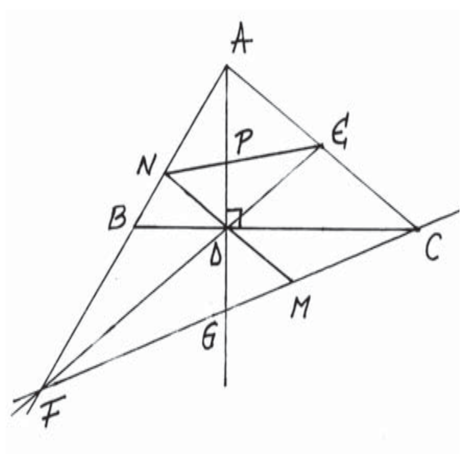
Fie $\{E\} \in [AC]$ astfel încât $[AE] = [EC]$. Fie $ED \cap AB = \{F\}$ şi $AD \cap FC = \{G\}$.

Paralela la AC prin D taie CF şi AF în M, respectiv N. Fie $NE \cap AD = \{P\}$.

Să se arate că $PA^2 = PD \cdot PG$.

Niţă Cristi

Demonstraţie.



În $\Delta AFC(\widehat{A} = 90^\circ)$ avem $[BD] = \dfrac{[BC]}{3}$ şi FE mediană, de unde rezultă că D reprezintă centrul de greutate al ΔAFC, ceea ce implică AG mediană şi $EG \| AF$.

Fie $EG \cap BC = \{S\}$. Cum $ES \| AB$ şi $[AE] \equiv [EC] \Rightarrow [BS] = [SC] = \dfrac{[BC]}{2}$.

Pe de altă parte $MN \| AC$ implică $DN \| AC$, iar $EG \| AF$ implică $ES \| BN$, de unde deducem că $\Delta BND \sim \Delta SEC$, ceea ce implică

$$\frac{ND}{EC} = \frac{BD}{SC} = \frac{\frac{BC}{3}}{\frac{BC}{2}} = \frac{2}{3}. \qquad (1)$$

Dar DE este mediană în $\Delta ADC(\widehat{D} = 90^\circ) \Rightarrow [DE] \equiv [EC]$, rezultă că relaţia (1) va deveni $\dfrac{ND}{DE} = \dfrac{2}{3}$ (2).

În $\Delta ADC(\widehat{D} = 90^\circ)$ avem $\widehat{ADE} \equiv \widehat{DAE}$ (3).

Cum $MN \| AC$ (ip.) $\Rightarrow \widehat{DAE} \equiv \widehat{ADN} \overset{(3)}{\Rightarrow} \widehat{ADE} \equiv \widehat{NDA} \Rightarrow \widehat{EDP} \equiv \widehat{NDP}$, rezultă că în ΔNDE, DP este bisectoare $\Rightarrow \dfrac{ND}{DE} = \dfrac{NP}{PE} = \dfrac{2}{3}$ (4).

În trapezul $NDEA$ $(ND \| AE)$ avem, datorită relaţiei de asemănare a triunghiurilor ΔNPD şi ΔEPA, relaţia $\dfrac{NP}{EP} = \dfrac{PD}{PA} \overset{(4)}{=} \dfrac{2}{3}$ (5).

În trapezul $BGCA$ ($BG \| AC$ deoarece BG este linie mijlocie în ΔACF) avem, datorită relaţiei de asemănare a triungiurilor ΔBDG şi ΔCDA, relaţia $\dfrac{AD}{GD} = \dfrac{CD}{BD} = 2$, care devine $\dfrac{AP + PD}{GD} = 2 \Rightarrow GD = \dfrac{AP + PD}{2}$ (6).

Deoarece $\dfrac{PD}{PA} = \dfrac{2}{3}$, putem considera $PD = 2k$ şi $PA = 3k$, unde k reprezintă o cincime din lungimea segmentului AD.

Astfel, $AP + PD = 5k \Rightarrow GD \overset{(6)}{=} \dfrac{5}{2}k$.

Pe de altă parte $PA^2 = 9k^2$ şi $PD \cdot PG = PD(PD + DG) = 2k(2k + \dfrac{5}{2}k) = 9k^2$, ceea ce demonstrează că $PA^2 = PD \cdot PG$.

$\blacksquare$