

Problema 3. Determinați numărul \overline{abcd} știind că

$$36^a + 6^a = 6^b + \overline{cddc}$$

și numărul \overline{cddc} este cubul unui număr prim.

* * *

Soluție Folosind scrierea zecimală avem

$$\overline{cddc} = 1001c + 110d = 11(91c + 10d)$$

ceea ce arată că $11 \mid \overline{cddc}$.

Cum \overline{cddc} este cubul unui număr prim rezultă

$$\overline{cddc} = 11^3 = 1331$$

Cu aceasta egalitatea din enunț devine

$$36^a + 6^a = 6^b + 1331$$

pe care o mai putem scrie

$$6^{2a} + 6^a = 6^b + 1331$$

sau

$$6^a(6^a + 1) = 6^b + 1331$$

În membrul stâng avem un produs de două numere consecutive, adică un număr par.

Pentru a avea egalitate și membrul drept trebuie să fie număr par deci $b = 0$

Atunci egalitatea devine

$$6^a(6^a + 1) = 1332$$

sau

$$6^a(6^a + 1) = 36 \cdot 37$$

de unde deducem că

$$6^a = 36$$

adică $a = 2$.

Numărul căutat este 2013.