P4. Orice grup G de ordin $4k+2$ are un subgrup H de ordin $2k+1$.

S. Notăm $n = 4k+2$, $G = \{1 = a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi observăm că pentru orice $i = \overline{1,n}$ există o permutare $\alpha_i \in S_n$ cu proprietatea că $a_i \cdot a_j = a_{\alpha_i(j)}$, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$. În plus, dacă $a_{i_1} \cdot a_{i_2} = a_{i_3}$, atunci pentru orice $j = \overline{1,n}$ are loc egalitatea

$$a_{\alpha_{i_3}(j)} = a_{i_3} \cdot a_j = a_{i_1} \cdot (a_{i_2} \cdot a_j) = a_{i_1} \cdot a_{\alpha_{i_2}(j)} = a_{\alpha_{i_1}(\alpha_{i_2}(j))},$$

astfel că $\alpha_{i_3} = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}$ şi rezultă că aplicaţia $\varphi : G \longrightarrow S_n : a_i \longmapsto \alpha_i$ este un morfism de grupuri. Cum $\alpha_i(1) = i$, $(\forall) i = \overline{1,n}$, morfismul este injectiv. Rezultă că G este izomorf cu subgrupul $G_1 = Im(\varphi)$ al lui S_n. Evident, $F(\alpha_i) = \emptyset$, $(\forall) i \geq 2$. În plus, $|G|$ fiind par, există în G un element de ordin 2. Putem presupune că $ord(a_2) = 2$. Dar atunci descompunerea în cicluri disjuncte a permutării $\alpha_2 \in G_1$ este formată numai din transpoziţii. Obţinem că $sgn(\alpha_2) = (-1)^{2k+1} = -1$, deci α_2 este impară, iar $H_1 = G_1 \cap A_n$ este un subgrup al lui G_1, cu proprietatea că

$$|H_1| = |G_1 \cap A_n| = \frac{|G_1| \cdot |A_n|}{|G_1 A_n|} = \frac{|G_1| \cdot |A_n|}{|S_n|} = \frac{|G_1|}{2} = 2k+1.$$

Subgrupul $H = \varphi^{-1}(H_1)$ al lui G are atunci ordinul $2k+1$.