Se consideră mulţimea cu patru elemente $A = \{4,\ 15,\ 24,\ m\}$, unde $m \in \mathbb{N}$. Arătaţi că există $n,\ p \in A$, $n \neq p$, astfel încât numărul $n + p - 3$ nu este pătrat perfect.

*Lucian Dragomir*, lista scurtă, O.N.M. 2008

**Soluţie**: Observăm că $4 + 15 - 3$, $4 + 24 - 3$ şi $15 + 24 - 3$ sunt pătrate perfecte. Presupunem, prin reducere la absurd, că şi pentru celelalte perechi de numere diferite din $A$ suma din enunţ este pătrat perfect, adică există $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\begin{cases} 4 + m - 3 = a^2 \\ 15 + m - 3 = b^2 \\ 24 + m - 3 = c^2 \end{cases} \text{ sau, echivalent, } \begin{cases} a^2 = m + 1 \\ b^2 = m + 12 \\ c^2 = m + 21 \end{cases};$$

de aici rezultă imediat $b^2 - a^2 = 11$ şi $c^2 - b^2 = 9$. Din prima din aceste ecuaţii rezultă $(b - a)(b + a) = 11$ adică $b - a = 1$ şi $b + a = 11$, de unde $b = 6$, $a = 5$. Dar din a doua ecuaţie $c^2 = 9 + b^2 = 45$, contradicţie. (De altfel, $b = 6$ conduce la $m = 24$, ceea ce nu convine).

**Observaţie**: De fapt nicicare două dintre relaţiile $a^2 = m + 1$, $b^2 = m + 12$, $c^2 = m+21$ nu pot avea loc simultan pentru că cele două ar implica $m \in \{4,\ 15,\ 24\}$ ceea ce nu convine.
Există însă o (unică) valoare întreagă a lui $m$ pentru care au loc simultan două dintre relaţiile de mai sus: $m = -12$.

**Alte soluţii primite de la concurenţi.**

**Soluţia 2.** (*Iulia Rebreanu*)
Un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 7 numai unul dintre resturile 0, 1, 2 sau 4. Pentru fiecare din cazurile $m = M7$, $m = M7 + 1, \ldots,\ m = M7 + 6$ se verifică uşor că cel puţin unul dintre numerele $m+4-3$, $m+15-3$ şi $m+24-3$ nu dă niciunul din resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7, prin urmare nu este pătrat perfect.

**Soluţia 3.** (*Ştefan Dominte, Andrei Grigoraş, Ştefania Ligia Jianu*, asemănătoare cu Soluţia 2, dar modulo 8)
Un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 8 numai unul dintre resturile 0, 1 sau 4. Pentru fiecare din cazurile $m = M8$, $m = M8 + 1, \ldots,\ m = M8 + 7$ se verifică uşor că cel puţin unul dintre numerele $m + 4 - 3$, $m + 15 - 3$ şi $m + 24 - 3$ nu dă niciunul din resturile 0, 1 sau 4 la împărţirea cu 8, prin urmare nu este pătrat perfect.
(Putem evita analizarea cazurilor observând că $m + 15 - 3$ şi $m + 24 - 3$ dau la împărţirea cu 8 resturi consecutive. Ca să fie pătrate perfecte ar trebui ca aceste resturi să fie 0 şi 1, adică $m = M8 + 4$, caz în care însă $m + 4 - 3 = M8 + 5$ nu poate fi pătrat perfect.)