Problema 1. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x)=f^2(\{x\})-f([x])+1,$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Prin $\{x\}$ *și* $[x]$ *am notat partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real* x *.*

Vladimir Cerbu și *Mihai Piticari,*
Concursul *Dimitrie Pompeiu,* Botoșani, 2017

Soluţie :

Făcând $x=0$ în relația din enunț obținem $(f(0)-1)^2=0$, de unde deducem $f(0)=1$. Pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ avem $f(x)=f^2(0)-f(x)+1$, deci $f(x)=1$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. Relația din enunț devine $f(x)=f^2(\{x\})$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $\{x+1\}=\{x\}$, rezultă că $f(x+1)=f^2(\{x+1\})=f^2(\{x\})=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, adică funcţia f este periodică cu perioada 1.

Este suficient să determinăm f pe intervalul $[0,1)$. Cum $\{x\}=x$, pentru orice $x\in[0,1)$, rezultă că $f(x)=f^2(x)$, pentru orice , $x\in[0,1)$ adică $f(x)=0$ sau $f(x)=1$, pentru orice $x\in[0,1)$.

Restricția funcției f la intervalul $[0,1)$ este $f_A(x)=\begin{cases}1\ , & x\in A\\ 0\ , & x\in[0,1)\setminus A\end{cases}$, unde A este o submulțime arbitrară a intervalului $[0,1)$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=f_A(\{x\})$, unde A este o submulțime arbitrară a intervalului $[0,1)$.