Problemă. Determinaţi numerele reale $x \geq 1$, $y \geq 1$, pentru care $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$ şi $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$ sunt numere întregi neconsecutive.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie.
Fie $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$, $b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$.

Din $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \leq \sqrt{2}$

rezultă $b - a \leq 2\sqrt{2}$, deci $b - a = 2$.
Apoi $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{2}$ implică $\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \dfrac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} \geq 2 - \sqrt{2}$, de unde $\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} \leq 2 + \sqrt{2}$, deci $y \leq 3$. Analog obţinem $x \leq 3$, deci $b \leq 4$.

Cazurile $b = 4, a = 2$ şi $b = 2, a = 0$ sunt imposibile. Vom arăta că în cazul $b = 3, a = 1$ se obţin $x = y = \dfrac{5}{4}$.

Într-adevăr, notând $u = \sqrt{x-1}$, $v = \sqrt{y-1}$, $w = \sqrt{x+1}$ şi $t = \sqrt{y+1}$, avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ w + t = 3 \\ w^2 - u^2 = 2 \\ t^2 - v^2 = 2. \end{cases}$$

Cu $t = 3 - w$, $v = 1 - u$, ne rămâne de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} w^2 - u^2 = 2 \\ (3-w)^2 - (1-u)^2 = 2. \end{cases}$$

Scăzând cele două ecuaţii obţinem $u = 3w - 4$ şi înlocuind în

$w^2 - u^2 = 2$ găsim $8w^2 - 24w + 18 = 0$ de unde $w = \dfrac{3}{2}$ şi $x = \dfrac{5}{4}$, apoi $y = \dfrac{5}{4}$.