Problema 1. Aflaţi restul împărţirii la 10 a numărului

$$N = 1^{2013} + 2^{2013} + ... + 2013^{2013}.$$

* * *

Soluţie: Notăm $u(x)$ cifra unităţilor numărului x.

Este evident că dacă $u(x) = a$, atunci restul împărţirii lui x la 10 va fi a.

Se ştie că $u(x+y) = u(x)+u(y)$ şi de asemenea $u(x^n) = u(x)^n$.

Avem $2013 = 4 \cdot 503+1$ şi atunci $u(1^{2013}) = 1$, $u(2^{2013}) = 2$, $u(3^{2013}) = 3$, $u(4^{2013}) = 4$, $u(5^{2013}) = 5$, $u(6^{2013}) = 6$, $u(7^{2013}) = 7$, $u(8^{2013}) = 8$, $u(9^{2013}) = 9$, $u(10^{2013}) = 0$, apoi se repetă.

$u(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0) = 5$. Dacă termenii sumei care dă numărul N se grupează câte 10 obţinem 201 grupe şi mai rămân 3 termeni, respectiv 2011^{2013}, 2012^{2013} şi 2013^{2013}.

Atunci, $u(N) = u(201 \cdot 5 + 1 + 2 + 3) = 1$.

Deducem că restul împărţirii la 10 a lui N este 1.