Concursul "Stelele matematicii" 2011

★ ★ ★ Sâmbătă, 10 decembrie 2011, orele 09:30
★ ★ ★ Liceul Internaţional de Informatică Bucureşti
★ ★ ★ **Proba Seniori**

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB \neq BC$, fie M mijlocul laturii AC, N punctul unde mediana BM intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC, H ortocentrul triunghiului ABC, D punctul de pe cercul circumscris pentru care $\angle BDH = 90^\circ$, şi K punctul pentru care patrulaterul $ANCK$ este paralelogram. Demonstraţi că dreptele AC, KH, BD sunt concurente.

Problema 2. Demonstraţi că există infinit de multe numere întregi pozitive n astfel ca pentru orice număr prim p, cu $p \mid n(n+1)$, să avem şi $p^2 \mid n(n+1)$. Determinaţi atât o valoare pară cât şi o valoare impară pentru astfel de numere $n > 8$.

Problema 3. Pentru un număr întreg $n \geq 3$, determinaţi intervalul valorilor posibile ale expresiei

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$$

unde numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ satisfac $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ pentru fiecare $1 \leq k \leq n-1$. Determinaţi şi când se ating valorile extreme.

Problema 4. Fie date n mulţimi A_i cu câte n elemente fiecare. Demonstraţi că elementele lor pot fi indexate $A_i = \{a_{i,j} \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$, $1 \leq i \leq n$, în aşa fel încât mulţimile $B_j = \{a_{i,j} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, $1 \leq j \leq n$, de asemenea să aibă câte n elemente fiecare.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultăţii - niciuna nu este trivială. Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în consideraţie. Încercaţi să nu folosiţi mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ Mult SUCCES tuturor participanţilor!