**Problema 3.** Fie $A$ şi $B$ două puncte fixate în planul $p$. Aflaţi locul geometric al punctelor $C$ din planul $p$ cu proprietatea că înălţimea din $B$ a triunghiului $ABC$ are aceeaşi lungime ca şi latura $[AC]$.

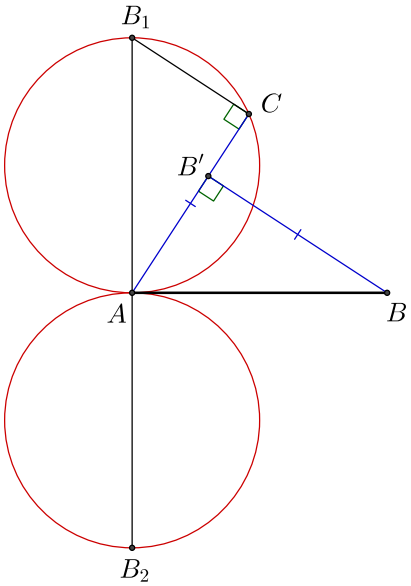
*Viktor Prasolov – Problems in Plane and Solid Geometry*, problema 7.24

*Soluţie:*

Fie $B_1$ şi $B_2$ pe perpendiculara în $A$ pe $AB$ astfel ca $AB_1 = AB_2 = AB$, $\mathscr{C}_1$ cercul de diametru $[AB_1]$ şi $\mathscr{C}_2$ cercul de diametru $[AB_2]$. Vom demonstra că locul geometric căutat este $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$.

Să arătăm mai întâi că orice punct al locului geometric aparţine reuninii celor două cercuri.

Dacă $C$ este un punct al locului geometric situat în acelaşi semiplan determinat de $AB$ ca şi $B_1$, vom demonstra că $C \in \mathscr{C}_1$. Fie $B'$ piciorul înălţimii din $B$ a triunghiului $ABC$. Triunghiurile $ABB'$ şi $B_1AC$ sunt congruente (LUL): $BB' = AC$ din ipoteză, $\angle B'BA \equiv \angle B_1AC$ (complementare cu $\angle B'AB$) şi $AB = AB_1$ din construcţie. Deducem că $m(\angle B_1CA) = m(\angle AB'B) = 90^\circ$, deci $C \in \mathscr{C}_1$. Evident, $C \neq A$, deci $C \in (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$.

Arătăm acum că orice punct din mulţimea $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$ aparţine locului geometric.

Fie $C \in \mathscr{C}_1 \setminus \{A\}$. Fie $B'$ piciorul perpendicularei din $B$ pe $AC$. Triunghiurile dreptunghice $ABB'$ şi $B_1AC$ sunt congruente (IU): $\angle B'BA \equiv \angle B_1AC$ (complementare cu $\angle B'AB$) şi $AB = AB_1$ din construcţie. Deducem că $BB' = AC$, deci $C$ aparţine locului geometric.