Etapa 4, Problema 2

Dacă m şi n sunt numere naturale date, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$3\sin^m x + 4\cos^n x = 5.$$

Laurenţiu Panaitopol, Gazeta Matematică 10/2005

Soluţie.

Dacă m şi n sunt ambele nule, ecuaţia nu are soluţii.

Dacă $m = 0$ şi n este nenul, ecuaţia devine $\cos^n x = \frac{1}{2}$. Pentru n impar, mulţimea soluţiilor este $\left\{\pm\arccos\frac{1}{\sqrt[n]{2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, iar pentru n par, mulţimea soluţiilor este $\left\{\pm\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dacă $n = 0$ şi m este nenul, ecuaţia devine $\sin^m x = \frac{1}{3}$. Pentru m impar, mulţimea soluţiilor este $\left\{(-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt[n]{3}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, iar pentru n par, mulţimea soluţiilor este $\left\{\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt[n]{3}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

În continuare, fie m şi n numere naturale nenule. Dacă x este soluţie a ecuaţiei, se observă că nu sunt posibile situaţiile $|\sin x| = 1$ sau $|\cos x| = 1$, prin urmare $|\sin x| \in (0,1)$ şi $|\cos x| \in (0,1)$. Avem:

$$5 = |3\sin^m x + 4\cos^n x| \leq 3|\sin^m x| + 4|\cos^n x|$$
$$\leq 3|\sin x| + 4|\cos x| \leqslant \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Toate inegalităţile se transformă în egalităţi; rezultă, în mod necesar, că $m = n = 1$, deci ecuaţia dată nu are soluţii când $m \geq 2$ sau $n \geq 2$.

Dacă $m = n = 1$, ecuaţia devine $3\sin x + 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = 1$, unde $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este, în acest caz, $\left\{\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.