Problema 4. a) Demonstraţi că pentru orice $a \geq 2$ avem $a(a-1) \geq 2$.

b) Determinaţi numerele naturale a şi b astfel încât

$$a^2 + b^2 - a - 2b = 3.$$

Mihai Bunget

Soluţie: a) Din

$$a \geq 2$$

obţinem

$$a - 1 \geq 1$$

înmulţind cu a rezultă

$$a(a-1) \geq a$$

şi cum $a \geq 2$ rezultă

$$a(a-1) \geq 2.$$

b) Relaţia din enunţ se mai scrie

$$a(a-1) + b(b-2) = 3.$$

De aici deducem că

$$a(a-1) \leq 3.$$

Pe de altă parte $a(a-1)$ este număr par, fiind produs de numere consecutive.

Aşadar, ţinând cont şi de punctul a) al problemei, sunt posibile cazurile:

1. $a(a-1) = 0$
2. $a(a-1) = 2$

În primul caz putem avea $a = 0$ sau $a-1$, iar $b(b-2) = 3$, de unde $b = 3$.

În al doilea caz avem $a = 2$ şi $b(b-2) = 1$ care nu are soluţie.

În concluzie, soluţiile problemei sunt $a = 0$ şi $b = 3$ sau $a = 1$ şi $b = 3$.